

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI**, 1.

SUR L'OPÉRATION ITÉRATIVE

DES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

NIELS NIELSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1924

Pris: Kr. 3,10.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI**, 1.

SUR L'OPÉRATION ITÉRATIVE

DES

ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

NIELS NIELSEN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1924

AVANT-PROPOS

Le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie Royale des Sciences termine assez harmonieusement, ce me semble, la première partie de mes recherches sur les équations de LAGRANGE, recherches qui sont indispensables pour le calcul d'une Table contenant les solutions primitives (u, v) des équations résolubles de la forme

$$(1) \quad u^2 - av^2 = (-1)^\delta \omega,$$

déterminées par les conditions

$$2 \leq a \leq 100, \quad 2 \leq \omega \leq 1000$$

et de quelques autres qui correspondent à des valeurs plus grandes de la base a .

Et je ne vois pour le moment aucun moyen de pousser plus loin de telles recherches d'un caractère assez général.

En effet, soit le nombre premier impair p diviseur de la forme quadratique

$$(2) \quad x^2 - ay^2,$$

on peut démontrer qu'il existe un positif entier α , qui peut être égal à l'unité, la hauteur de p par rapport à la base a , de sorte que l'équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^\delta p^n$$

est, avec un choix convenable de l'exposant δ , toujours résoluble, pourvu que n soit multiple de α , et seulement dans ce cas.

Quant à la puissance p^β , sa hauteur par rapport à la base a est le plus petit commun multiple de α et β .

Ces définitions adoptées, je démontre, dans l'article XV, un théorème généralement valable pour toutes les bases décomposées, avec des réserves pour certaines bases de seconde espèce ne contenant que deux facteurs premiers inégaux.

En effet, partons du paramètre

$$\omega = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots \pi_n^{\alpha_n},$$

décomposé en facteurs premiers, puis supposons que tous les facteurs $\pi_r^{\alpha_r}$ soient des hauteurs 1 ou 2 par rapport à la base a , il existe toujours une décomposition

$$a = pq, \quad 1 \leq p < q \leq a,$$

telle que l'équation

$$(3) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega$$

est résoluble, et le genre de cette équation a sa valeur maximum 2^{n-1} ou 2^n , selon que $\omega = 4k+2$ ou non.

Soit, dans l'équation (3),

$$p = 1, \quad q = a,$$

nous aurons une équation de LAGRANGE, sinon je la désigne comme une équation de LEGENDRE, parce que ce géomètre, aussi modeste que distingué, mais souvent trop peu apprécié, a étudié de telles équations qui correspondent à l'hypothèse $\omega = 1$.

Et c'est précisément la théorie des équations de LEGENDRE qui permet de démontrer le théorème susdit.

Désignons maintenant par

$$P_1 P_2 P_3 \dots P_n \dots$$

l'ensemble des diviseurs premiers impairs de la forme quadratique (2), par

$$h_1 h_2 h_3 \dots h_n \dots$$

leurs hauteurs par rapport à la base a , on peut démontrer que le plus petit commun multiple H_a de ces hauteurs ne dépend que d'un certain nombre des premières valeurs des h_s .

Ce nombre H_a , que nous désignons comme la hauteur absolue de la base a , est diviseur du nombre de classes de la forme quadratique (2).

A ce point de vue, on démontrera aussi facilement que la hauteur absolue H_a est impair, pourvu que a soit un nombre premier, mais toujours pair, pourvu que a contienne au moins trois facteurs premiers inégaux.

Mais, soit p un diviseur premier impair de la forme quadratique susdite, nous ne possédons pour le moment aucun moyen général de déterminer de la hauteur de p par rapport à la base a , nous savons seulement que cette hauteur est diviseur de la hauteur absolue H_a . Et la connaissance des hauteurs de tous les facteurs premiers d'un paramètre ω est indispensable pour la résolution numérique de l'équation de LAGRANGE en question.

Quant au genre d'une équation de LAGRANGE, ce nombre n'a aucune analogie dans la théorie des formes quadratiques, et sa détermination générale, à l'aide des hauteurs des facteurs premiers du paramètre ω , semble un peu compliquée.

Dans le Chapitre V du présent Mémoire, on trouvera des théorèmes fondamentaux, en ce qui concerne le cas $H_a = 3$, théorèmes qui sont nécessaires pour démontrer par exemple que le genre de l'équation

$$u^2 - 37 v^2 = \pm 924$$

est égal à 6.

Et, chose curieuse, le genre de toutes les autres équations, résolues dans ma Table susdite, est une puissance de 2.

On trouvera bien, dans cette Table, la valeur absolue $H_a = 3$ pour les bases

$$79 \quad 101 \quad 141 \quad 142 \quad 197 \quad 257,$$

mais les produits de quatre diviseurs premiers de la hauteur 3 dépassent, pour ces bases, toujours la limite fixée 1000 du paramètre ω .

Dans le Chapitre Premier, j'ai résolu un autre problème qui se rattache à la hauteur absolue d'une base.

A cet effet, supposons résolubles les équations de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta r} \omega_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

puis désignons par

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

un positif entier décomposé en facteurs premiers et étant premier avec tous les paramètres ω_r , la hauteur d'un quelconque de ces paramètres, par rapport à la base ak^2 , est une aliquote du nombre

$$\Omega = k (p_1^2 - 1) (p_2^2 - 1) \dots (p_n^2 - 1).$$

Quant aux équations de LEGENDRE

$$p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta} \omega$$

nous avons déjà remarqué qu'elles jouent un rôle essentiel dans la théorie des équations de LAGRANGE de la hauteur 2 et par conséquent aussi pour de telles équations d'une hauteur paire.

Quant à la hauteur d'une équation de LAGRANGE, supposons que l'équation

$$(4) \quad u^2 - av^2 = \pm \omega^m$$

soit résoluble, pourvu que m soit multiple du positif entier n , et seulement dans ce cas, nous disons que les suites coordonnées de cette équation sont de la hauteur n .

Soit l'équation (4) du genre maximum, pourvu que m soit multiple du positif entier ν , et seulement dans ce cas, nous disons que cette équation est de la hauteur ν .

De plus, on démontrera aussi facilement, à ce point de vue, que la hauteur absolue H_a de la base a est toujours un nombre pair, pourvu que a ne soit ni un nombre premier ni une base de seconde espèce de la forme $4k+1$ ou de la forme $4k+2$, qui ne contient que deux facteurs premiers inégaux. Ces nombres sont par conséquent les seules bases qui n'admettent aucune équation de LEGENDRE.

Il est bien connu que la théorie des formes quadratiques est restée jusqu'ici insuffisante, en ce qui concerne l'espèce d'une base composée qui est une somme de deux carrés premiers entre eux, et que les règles de DIRICHLET sont trouvées à un autre point de vue.

Dans le Chapitre VI du présent Mémoire, j'ai donné des suppléments aux règles susdites, et j'ai examiné les vingt-trois nombres de la forme

$$(10a \pm b) + (10b \mp a)^2 = 101(a^2 + b^2)$$

qui sont inférieurs à 10000. Parmi ces vingt-trois nombres six seulement sont des bases de seconde espèce.

Les Tables numériques, jointes à ce Mémoire, sont calculées par moi, revues et contrôlées par M. G. RASH.

Copenhague, le 14 décembre 1923.

NIELS NIELSEN.

CHAPITRE PREMIER

Applications de l'opération générale.

I. Congruences fondamentales.

Soit, comme ordinairement, (A_n, B_n) la solution générale de l'équation de FERMAT

$$(1) \quad x^2 - ay^2 = (-1)^{\theta},$$

de sorte que

$$(2) \quad A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{n\theta},$$

et soit k un positif entier quelconque, il existe un indice r , le rang du nombre k par rapport à la base a , tel que B_n est toujours multiple de k , pourvu que l'indice n soit multiple de r , et inversement; c'est-à-dire que la solution générale (α_n, β_n) de cette autre équation de FERMAT

$$(3) \quad x^2 - (ak^2)y^2 = (-1)^{n\epsilon}, \quad \epsilon = r\theta,$$

se présente sous la forme

$$(4) \quad \alpha_n = A_{nr}, \quad \beta_n = \frac{B_{nr}}{k}.$$

Cela posé, il est évident que nous pouvons nous borner à étudier les équations de FERMAT, dont la base ne contient aucun facteur quadratique; ces bases, que nous désignons comme des bases réduites, jouent un rôle essentiel dans plusieurs de nos recherches suivantes.

Quant à l'équation de LAGRANGE

$$(5) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\theta}\omega,$$

désignons par k un positif entier, premier avec le paramètre ω , cette autre équation de LAGRANGE

$$(6) \quad u^2 - (ak^2)v^2 = (-1)^{\epsilon} \omega$$

n'est pas généralement résoluble; c'est-à-dire qu'il n'existe généralement aucune solution (u, v) de l'équation (5), pour laquelle le nombre v est multiple de k .

Mais supposons impair le paramètre ω , il existe toujours un positif entier ϱ , la hauteur de ω par rapport à la base ak^2 , de sorte que cette autre équation de LAGRANGE

$$(7) \quad u^2 - (ak^2)v^2 = (-1)^{n\varrho} \omega^n$$

est résoluble, pourvu que l'exposant n soit multiple de ϱ , et seulement dans ce cas.

A cet effet, nous avons tout d'abord à étudier plus profondément l'opération itérative de l'équation (5), définie par les formules

$$(8) \quad \begin{cases} s_1 = u, & t_1 = v \\ s_{n+1} = s_1 s_n + a t_1 t_n, & t_{n+1} = s_1 t_n + t_1 s_n, \end{cases}$$

de sorte que nous aurons, quel que soit l'indice n ,

$$(9) \quad s_n^2 - a t_n^2 = (-1)^{n\varrho} \omega^n,$$

équation qui est toujours résoluble, pourvu que (5) le soit, et pourvu que ω soit impair.

Soit, au contraire, le paramètre ω un nombre pair, il faut supprimer, dans l'équation (9), une certaine puissance de 2, qui est diviseur commun de s_n , t_n , ω . Et, dans ce cas, l'équation (9) présente, à ce point de vue, des difficultés singulières, nous le verrons dans ce qui suit.

Quoi qu'il en soit, on aura, comme dans la théorie de l'équation de FERMAT,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{nr} = \sum_{\mu=0}^{\leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2\mu} a^\mu t_r^{2\mu} s_r^{n-2\mu} \\ t_{nr} = \sum_{\mu=0}^{\leq \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2\mu+1} a^\mu t_r^{2\mu+1} s_r^{n-2\mu-1}, \end{array} \right.$$

formules qui sont valables, quels que soient les deux indices n et r .

Cela posé, nous aurons immédiatement les congruences suivantes

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_{nr} \equiv s_r^n \pmod{a}, \quad t_{nr} \equiv n t_r s_r^{n-1} \pmod{a}, \\ s_{2nr+r} \equiv 0 \pmod{s_r}, \quad s_{2nr} \equiv a^n t_r^{2n} \pmod{s_r}, \\ t_{nr} \equiv 0 \pmod{t_r}, \quad s_{nr} \equiv s_r^n \pmod{t_r}, \end{array} \right.$$

congruences qui sont analogues à celles connues de la théorie de l'équation de FERMAT, et qui donnent des éclaircissements essentiels sur l'opération itérative.

Ici nous nous bornerons à indiquer la proposition suivante, tirée directement de la première des congruences (11), en y posant $r = 1$:

I. Soit k un diviseur de la base a , qui est premier avec t_1 , les deux congruences

$$(12) \quad t_n \equiv 0 \pmod{k}, \quad n \equiv 0 \pmod{k}$$

sont équivalentes.

Posons ensuite, dans les formules (10), $r = 1$, puis remplaçons n par le nombre premier impair

$$(13) \quad p = 2r + 1,$$

les congruences

$$\binom{p}{\mu} \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \leq \mu \leq p-1,$$

donnent immédiatement, en vertu du théorème de FERMAT,

$$(14) \quad s_p \equiv s_1 \pmod{p},$$

congruence qui est valable, quels que soient du reste a et p .

De plus, supposons que le nombre premier p en question ne divise pas la base a , nous aurons

$$(15) \quad t_p \equiv \left(\frac{a}{p}\right) t_1 \pmod{p},$$

où

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \pm 1 \equiv a^{\nu} \pmod{p}$$

désigne, comme ordinairement, le symbole de LEGENDRE.

Les congruences ainsi obtenues sont fondamentales pour nos recherches suivantes, mais leurs applications exigent des recherches ultérieures sur l'opération itérative.

II. Le paramètre est un nombre impair.

La définition générale de l'opération itérative donnera immédiatement les formules récursives générales

$$(1) \quad s_{n+p} = s_n s_p + a t_n t_p, \quad t_{n+p} = s_n t_p + t_n s_p,$$

analogues à celles connues de la théorie des équations de FERMAT et de LAGRANGE.

Résolvons maintenant par rapport à s_n et t_n les deux équations (1), puis remplaçons n par $n-p$, il résulte, en vertu de la formule (9) de l'article précédent,

$$(2) \quad \begin{cases} s_n s_p - a t_n t_p = (-1)^{p^{\delta}} \omega^p s_{n-p} \\ s_p t_n - t_p s_n = (-1)^{p^{\delta}} \omega^p t_{n-p} \end{cases}$$

où il faut supposer, bien entendu, $n > p$.

Posons ensuite, à cause des applications suivantes,

$$n + p = \mu + 2\nu, \quad n - p = \mu,$$

ce qui donnera

$$n = \mu + \nu, \quad p = \nu,$$

nous aurons, en ajoutant les formules (1) et (2) ainsi obtenues,

$$(3) \quad \begin{cases} s_{\mu+2\nu} + (-1)^{\nu\theta} \omega^\nu s_\mu = 2s_\nu s_{\mu+\nu} \\ t_{\mu+2\nu} + (-1)^{\nu\theta} \omega^\nu t_\mu = 2t_\nu t_{\mu+\nu}, \end{cases}$$

tandis qu'il résulte, en soustrayant les formules susdites,

$$(4) \quad \begin{cases} s_{\mu+2\nu} - (-1)^{\nu\theta} \omega^\nu s_\mu = 2a t_\nu t_{\mu+\nu} \\ t_{\mu+2\nu} - (-1)^{\nu\theta} \omega^\nu t_\mu = 2t_\nu s_{\mu+\nu}. \end{cases}$$

Introduisons maintenant, dans les formules (3) et (4),

$$\mu = 1 \quad \nu = \frac{p-1}{2},$$

où p est un nombre premier impair qui ne divise pas la base a , nous avons à étudier séparément les cas suivants :

1° ν est un nombre pair, savoir $p = 4k + 1$; les premières formules (3) et (4) se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} s_p + \omega^\nu s_1 &= 2s_\nu s_{\nu+1} \\ s_p - \omega^\nu s_1 &= 2a t_\nu t_{\nu+1}, \end{aligned}$$

ce qui donnera

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{t_{p-1}}{2} \frac{t_{p+1}}{2} \equiv 0 \pmod{p} \\ t_{p-1} t_{p+1} \equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

selon que a est résidu ou non-résidu de p .

2° ν est impair, ce qui donnera $p = 4k + 3$; les formules fondamentales deviennent ici

$$\begin{aligned} s_p - \omega^\nu s_1 &= 2s_\nu s_{\nu+1} \\ s_p + \omega^\nu s_1 &= 2a t_\nu t_{\nu+1}, \end{aligned}$$

de sorte que nous retrouvons les congruences (5), valables selon que ω est non-résidu ou résidu de p .

Cela posé, nous avons encore à étudier le cas, où le nombre premier p divise la base a , sans diviser bien entendu t_1 ; car dans ce cas, ω est de la hauteur 1 par rapport à la base ak^2 .

Or, la proposition I de l'article précédent donnera immédiatement

$$(6) \quad t_p \equiv 0 \pmod{p},$$

de sorte qu'il résulte, en vertu de (5) et (6), la proposition générale:

I. Soit p un nombre premier impair qui ne divise pas t_1 , mais quelconque du reste, nous aurons toujours la congruence

$$(7) \quad t_\varrho \equiv 0 \pmod{p},$$

où ϱ est une aliquote de $p(p^2 - 1)$.

Supposons ensuite que le nombre impair k soit décomposé en facteurs premiers comme suit

$$(8) \quad k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

nous aurons, en vertu de la proposition précédente,

$$(9) \quad t_\varrho \equiv 0 \pmod{k},$$

où l'indice ϱ est une aliquote du nombre

$$(10) \quad \Omega = k(p_1^2 - 1)(p_2^2 - 1) \dots (p_n^2 - 1),$$

ce qui donnera le théorème fondamental:

II. La hauteur du paramètre impair ω par rapport à la base ak^2 , où k est impair, est une aliquote du nombre Ω , défini par la formule (10).

On voit que le nombre Ω ne dépend ni de la base a ni du paramètre ω , mais, bien entendu, la détermination

exacte de la hauteur, qui est un problème assez difficile, exige la connaissance de ces deux nombres.

Supposons que l'équation de LAGRANGE

$$(11) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} \omega,$$

dont il s'agit, soit d'un genre plus élevé que 2, les différents couples de ses suites coordonnées ont généralement des hauteurs inégales par rapport à la base ak^2 .

Soit par exemple

$$a = 2, \quad k = 5,$$

la base 50 a la hauteur absolue 2.

Le couple de suites coordonnées auquel appartient la solution (u, v) est de la hauteur 1, pourvu qu'un des nombres

$$v, \quad u \pm v$$

soit multiple de 5, mais de la hauteur 2, pourvu qu'un des nombres

$$u, \quad u \pm 2v$$

ait cette propriété.

Soit, comme second exemple,

$$a = 13, \quad k = 5,$$

la base 325 a la hauteur absolue 6.

Il résulte, en vertu des congruences

$$s_3 = u^3 + 39uv^2 \equiv u(u^2 - v^2) \pmod{5}$$

$$t_3 = 3u^2v + 13v^3 \equiv 3v(u^2 + v^2) \pmod{5},$$

que le couple de suites coordonnées, auquel appartient la solution (u, v) , est de la hauteur 1, 2, 3, 6 selon que

$$v, \quad u, \quad u^2 + v^2, \quad u^2 - v^2$$

est divisible par 5.

III. Le paramètre est un nombre pair.

Dans l'étude de l'équation de LAGRANGE au paramètre pair, savoir l'équation

$$(1) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2^r \omega,$$

où ω est supposé impair, nous ne trouvons aucun théorème général, parce qu'il faut considérer séparément les trois cas suivants:

1° $r = 1$; dans ce cas, l'opération itérative donnera

$$(2) \quad \begin{cases} s_{2n}^2 - at_{2n}^2 = \omega^{2n} \\ s_{2n+1}^2 - at_{2n+1}^2 = (-1)^{\delta} \omega^{2n+1}. \end{cases}$$

2° $r = 2$; ici nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} s_{3n+1}^2 - at_{3n+1}^2 = (-1)^{n\delta \pm \delta} 4 \omega^{3n+1} \\ s_{3n}^2 - at_{3n}^2 = (-1)^{n\delta} \omega^{3n}. \end{cases}$$

3° $r \geq 3$, hypothèse qui donnera

$$(4) \quad s_n^2 - at_n^2 = (-1)^{n\delta} 2^{nr-2n+2} \omega^n,$$

et il est évident que les résultats généraux, en ce qui concerne la congruence

$$(5) \quad t_n \equiv 0 \pmod{k},$$

où k est nécessairement impair, obtenus dans l'article précédent, sont applicables aussi dans ce cas; c'est-à-dire que le théorème II de l'article précédent n'a aucune analogie, dans les deux premiers cas que nous venons de considérer.

Cela posé, il est évident que le nombre premier 2 ne présente, à ce point de vue, aucune analogie avec les nombres premiers impairs, mais qu'il faut le remplacer par 8.

En effet, supposons résoluble l'équation de LAGRANGE

$$(6) \quad u^2 - av^2 = (-1)^d 8,$$

l'opération itérative du n -ième ordre conduira, quel que soit n , à cette autre équation résoluble

$$(7) \quad s_n^2 - at_n^2 = (-1)^{n^d} 2^{n+2}.$$

Supposons donc résoluble l'équation

$$(8) \quad u^2 - av^2 = (-1)^d 2^n, \quad n \geq 3,$$

tandis qu'aucune puissance inférieure de 2 n'est applicable comme paramètre de la base a , nous disons que 2 est de la hauteur $n-2$ par rapport à la base a .

Quant à l'équation (4), supposons résoluble cette autre équation

$$(9) \quad \alpha^2 - a\beta^2 = (-1)^\varepsilon 2^\mu, \quad \mu \geq 3,$$

nous avons à démontrer la proposition :

I. Il existe une infinité d'exposants n qui admettent la résolution de l'équation

$$(10) \quad u^2 - av^2 = (-1)^f (2^r \omega)^n.$$

En effet, l'opération itérative de l'ordre m donnera, en vertu de (9),

$$(11) \quad \sigma_m^2 - at_m^2 = (-1)^{m\varepsilon} 2^{u m - 2m + 2};$$

multiplions ensuite les équations (4) et (11), nous aurons, en choisissant convenablement le signe appliqué dans cette multiplication, une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = (-1)^{n^d + m\varepsilon} 2^{nr - 2n + \mu m - 2m + 2} \omega^n,$$

de sorte qu'il s'agit de déterminer m et n , tels que

$$(12) \quad 2(u-1) = m(\mu-2),$$

ce qui donnera une infinité de valeurs du couple (m, n) .

Mais, les nombres ν tirés de l'équation (10) présentent-ils des multiples du nombre impair k ?

A cet effet, supposons que t_n et τ_m soient tous deux multiples de k , de sorte que n et m sont les plus petits indices qui correspondent à cette propriété, il est évident que les nombres $t_{n\lambda}$ et $\tau_{m\lambda}$ sont aussi multiples de k , quels que soient les positifs entiers λ et μ ; c'est-à-dire que nous aurons, en vertu de (12), à résoudre l'équation indéterminée

$$(13) \quad \mu(m\lambda - 2) = 2(n\nu - 1),$$

équation qui n'est pas généralement résoluble en positifs entiers de λ et μ .

Quant au problème qui nous occupe ici, nous démontrerons encore la proposition:

II. Il existe une infinité d'exposants n qui permettent de résoudre l'équation

$$(14) \quad u^2 - av^2 = (-1)^\epsilon \omega^n.$$

En effet, il résulte des formules (4) et (9) que l'équation (14) est résoluble, pourvu que m et n satisfassent à l'équation

$$m(s-2) = n(\nu-2),$$

équation qui est toujours résoluble en positifs entiers.

IV. Sur le facteur $k = 2^n$.

Le facteur

$$k = 2^n$$

a aussi, comme il était à prévoir, des propriétés singulières.

En effet, supposons que le nombre premier 2 soit, par rapport à la base a , du rang σ , nous aurons nécessairement

$$\sigma = 1, 2;$$

car le nombre

$$B_2 = 2A_1 B_1$$

est toujours pair. Soit donc

$$(1) \quad B_{\sigma} = 2^z (2l + 1),$$

tandis que

$$r = 2^{\lambda} \sigma,$$

on aura

$$(2) \quad B_r = 2^{z+\lambda} (2l_1 + 1);$$

c'est-à-dire qu'il existe des nombres B_n divisibles par une puissance quelconque de 2, dont l'exposant est plus grand que z .

Quant à l'équation de LAGRANGE

$$(3) \quad u^2 - a v^2 = (-1)^{\theta} \omega,$$

il n'est pas sûr qu'aucun des nombres v ne soit pair. Mais supposons que

$$2^{\nu}, \quad \nu \geq 0,$$

soit la plus petite puissance de 2 qui divise un nombre v tiré de l'équation (3), savoir

$$(4) \quad v = 2^{\nu} (2\alpha + 1),$$

puis supposons $\nu \geq z$, il existe un indice ϱ , tel que

$$B_{\varrho} = 2^{\nu} (2\beta + 1);$$

c'est-à-dire que les nombres

$$v A_{\varrho} \pm u B_{\varrho}$$

sont tous deux divisibles par $2^{\nu+1}$, et ainsi de suite, de sorte que nous aurons la proposition curieuse:

I. Soit, dans les formules (1) et (4), $\nu \geq z$, l'équation

$$(5) \quad u^2 - (2^n a) v^2 = (-1)^{\theta} \omega$$

est toujours résoluble, quel que soit l'exposant n .

Supposons maintenant $\nu < z$, toutes les valeurs paires de v , appartenant au même couple de suites coordonnées, sont précisément divisibles par la puissance 2^ν , de sorte que ces nombres sont tous de la forme (4).

Appliquons maintenant l'opération itérative du second ordre, nous trouvons des nombres t_2 précisément divisibles par $2^{\nu+1}$, et ainsi de suite, ce qui donnera des $t_{z-\nu+1}$ qui sont divisibles par 2^z , de sorte que la proposition I est applicable.

V. Sur les bases $2^{2n} + 1$.

La première des Tables numériques jointes au présent Mémoire exige des éclaircissements sur les bases

$$(1) \quad a = 2^{2n} + 1, \quad n \geq 2.$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que

$$(2) \quad \omega = 2^{n+1}$$

est la plus petite valeur du paramètre ω qui permet de résoudre l'équation de LAGRANGE

$$(3) \quad u^2 - av^2 = \pm \omega,$$

de sorte que le nombre premier 2 est par rapport à la base a de la hauteur $n-1$, il est facile de démontrer la proposition:

I. Supposons résoluble l'équation

$$(4) \quad u^2 - av^2 = \pm 2^r p, \quad 3 \leq r \leq n,$$

où p est un nombre premier impair, la hauteur de p par rapport à la base a est diviseur de $n-1$.

En effet, posons

$$u^2 - av^2 = \pm 2^{n+1},$$

l'opération itérative de l'ordre μ donnera

$$(5) \quad s_{\mu}^2 - a t_{\mu}^2 = \pm 2^{\mu n - \mu + 2},$$

tandis que l'opération de l'ordre ν donnera, en vertu de (4),

$$(6) \quad s_{\nu}^2 - a t_{\nu}^2 = \pm 2^{\nu r - 2\nu + 2} p^{\nu},$$

et il nous reste à déterminer μ et ν , de sorte que les deux puissances de 2 qui figurent aux seconds membres de (5) et (6) auront le même exposant, ce qui exige

$$(7) \quad (n-1)\mu = (r-2)\nu.$$

Soit maintenant f le plus grand commun diviseur de $n-1$ et $r-2$, et soient

$$n-1 = n_1 f, \quad r-2 = r_1 f,$$

il résulte, en vertu de (7),

$$n_1 \mu = r_1 \nu,$$

de sorte que ν est nécessairement multiple de n_1 , donc p est de la hauteur n_1 par rapport à la base a , et n_1 est bien diviseur de $n-1$.

Il résulte de la formule (7) que p est précisément de la hauteur $n-1$, pourvu que $r = 3$.

Soit ensuite

$$n-1 = 2^{\rho},$$

toutes les hauteurs en question sont des puissances de 2, et leurs exposants sont au plus égaux à ρ .

Posons par exemple $n = 5$, ce qui donnera

$$a = 2^{10} + 1 = 1025 = 41 \cdot 5^2,$$

puis partons de l'équation

$$(8) \quad u^2 - 41 v^2 = \pm \omega,$$

supposée résoluble, ω est de la hauteur 1, 2, 4 par rapport à 1045, selon que v , u , $u \pm 7v$ est multiple de 5.

En effet, soit ni u ni v divisible par 5, il est possible de choisir le signe, de sorte que

$$u \pm 7v \equiv u \pm 2v \pmod{5}$$

devienne multiple de 5, et la multiplication de l'équation (8) par celle-ci

$$7^2 - 41 \cdot 1^2 = 8$$

donnera

$$(7u \pm 41v)^2 - 41(v \pm 7u)^2 = \pm 8\omega.$$

La Table Première, contenant les solutions des équations résolubles de la forme (8), permet donc de déterminer immédiatement la hauteur de ω par rapport à la base 1045.

Quant aux bases spéciales qui nous occupent ici, nous avons encore à démontrer deux autres propositions, savoir:

II. Supposons $3 \leq \sigma \leq n$, il existe une infinité d'équations résolubles de la forme

$$(9) \quad u^2 - av^2 = \pm 2^\sigma(2z + 1).$$

En effet, partons de l'équation

$$u^2 - av^2 = \pm \omega,$$

puis posons

$$(10) \quad u = 2^s k + 1, \quad v = 1, \quad s \geq 2,$$

où k est un nombre impair, nous aurons

$$(11) \quad \pm \omega = (2^{2n} + 1) - (2^s k + 1)^2,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(12) \quad \pm \omega = 2^{s+1}(2^{2n-s-1} - 2^{s-1}k - k),$$

et ce paramètre est précisément de la forme susdite, de sorte qu'il ne nous reste qu'à démontrer que l'équation (9), ainsi obtenue soit résoluble; c'est-à-dire que a et ω ou a et u sont premiers entre eux.

Or, choisissons arbitrairement le nombre impair k , puis supposons que a et $2^s k + 1$ ne soient pas premiers entre eux, il est évident que a et $2^s(k+2) + 1$ auront nécessairement cette propriété, parce que tous les facteurs communs de a et $2^s k + 1$ sont impairs.

III. Supposons que la base a soit résidu quadratique du nombre premier impair p , puis supposons donné l'exposant s qui figure dans la formule (10), il est possible de déterminer le nombre impair k , tel que le paramètre ω , défini par la formule (12), soit multiple de p .

En effet, il existe un positif entier b , de sorte que

$$2^{2n} + 1 \equiv b^2 \pmod{p},$$

ce qui donnera, en vertu de (11),

$$\pm \omega \equiv b^2 - (2^s k + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(13) \quad 2^s k \equiv b^2 - 1 \pmod{p},$$

congruence qui est toujours résoluble, parce que 2^s et p sont premiers entre eux.

Soit ensuite k_1 une solution quelconque de (13), la solution générale de cette congruence se présente sous la forme

$$(14) \quad k = k_1 + pm,$$

où m est un entier quelconque, et il est évident que la formule (14) détermine une infinité de valeurs impaires de k .

CHAPITRE II

Sur les nombres A_n et u_n .

VI. Résidus par rapport à la base.

Dans ce qui suit, nous avons souvent besoin des résidus obtenus en divisant par la base a les nombres A_n et u_n , tirés de l'équation de FERMAT

$$(1) \quad A_\mu^2 - aB_\mu^2 = (-1)^{\mu\epsilon}$$

et de l'équation de LAGRANGE

$$(2) \quad u_\lambda^2 - av_\lambda^2 = (-1)^{\delta_\lambda} \omega;$$

c'est pourquoi il nous semble utile d'étudier plus profondément de tels résidus.

A cet effet, partons de la formule de LAGRANGE

$$(3) \quad A_{2\mu} = 2aB_\mu^2 + (-1)^{\mu\epsilon},$$

nous aurons immédiatement la congruence fondamentale

$$(4) \quad A_{2\mu} \equiv (-1)^{\mu\epsilon} \pmod{a},$$

de sorte que la formule récursive de LAGRANGE

$$(5) \quad A_{\lambda+2\mu} = A_\lambda A_{2\mu} + aB_\lambda B_{2\mu}$$

conduira à la congruence générale

$$(6) \quad A_{\lambda+2\mu} \equiv (-1)^{\mu\epsilon} A_\lambda \pmod{a},$$

valable quels que soient les indices λ et μ .

Or, il est bien curieux, ce me semble, que les nombres u_λ , tirés d'une suite quelconque des solutions de (2), satisfont à une congruence analogue à (6).

En effet, la formule réursive

$$(7) \quad u_{\lambda+2\mu} = u_\lambda A_{2\mu} + a v_\lambda B_{2\mu}$$

donnera, en vertu de (4),

$$(8) \quad u_{\lambda+2\mu} \equiv (-1)^{\mu\epsilon} u_\lambda \pmod{a},$$

de sorte qu'il s'agit de déterminer seulement les résidus des deux nombres u_1 et u_2 pour connaître les résidus de tous les nombres u_n appartenant à la même suite de solutions.

Supposons ensuite $\omega > 2$, puis désignons par (u'_n, v'_n) l'élément général de la suite coordonnée à la précédente, nous aurons, en désignant par λ et μ les deux indices 1 et 2, pris dans un ordre quelconque,

$$u_\lambda u'_\mu + a v_\lambda v'_\mu = \omega A_2$$

$$v_\lambda u'_\mu + v_\mu u'_\lambda = \omega B_2,$$

ce qui donnera

$$(-1)^\delta u'_\mu = u_\lambda A_2 - a v_\lambda B_2$$

$$(-1)^\delta v'_\mu = u_\lambda B_2 - v_\lambda A_2,$$

où nous avons posé

$$(9) \quad u_\lambda^2 - a v_\lambda^2 = (-1)^\delta \omega, \quad \lambda = 1, 2,$$

de sorte qu'il résulte finalement, en vertu de (4),

$$(10) \quad u'_\mu \equiv (-1)^{\delta+\epsilon} u_\lambda \pmod{a};$$

c'est-à-dire que nous venons de démontrer la proposition curieuse:

I. Les restes modulo a de tous les nombres u_m et u'_n , appartenant au même couple de suites coor-

données, sont connus, pourvu que les restes des deux premiers nombres u_1 et u'_1 le soient.

Posons maintenant

$$(11) \quad u_\lambda = ak_\lambda + (-1)^\theta r, \quad \theta < r < a,$$

le nombre r joue un rôle fondamental, dans la résolution numérique de l'équation (9).

En effet, il résulte, en vertu de (9) et (11),

$$(12) \quad (-1)^\theta \omega \equiv r^2 \pmod{a},$$

de sorte que $(-1)^\theta \omega$ est nécessairement résidu quadratique de a ; posons ensuite

$$(13) \quad (-1)^\theta \omega = r^2 + sa,$$

nous aurons, en vertu de (9) et (11),

$$(14) \quad ak_\lambda^2 \pm 2rk_\lambda - s = v_\lambda^2;$$

c'est-à-dire qu'il faut déterminer le nombre k_λ , tel que le premier membre de (14) devienne un carré exact, et l'équation (9) est résolue.

Quant au quotient k_λ , la formule récursive (7) donnera, en vertu de (3),

$$u_{\lambda+2\nu} = 2au_\lambda B_\nu^2 + av_\lambda B_{2\nu} + (-1)^{\nu\epsilon} u_\lambda,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$u_{\lambda+2\nu} = 2aB_\nu u_{\lambda+\nu} + (-1)^{\nu\epsilon} u_\lambda.$$

Posons donc, conformément à (11),

$$(15) \quad u_{\lambda+2\nu} = ak_{\lambda+2\nu} + (-1)^{\lambda+\nu\epsilon} r,$$

il résulte, pour les coefficients k_n , la formule récursive

$$(16) \quad k_{\lambda+2\nu} = 2B_\nu u_{\lambda+\nu} + (-1)^{\nu\epsilon} k_\lambda.$$

Quant à la suite coordonnée, nous aurons, en vertu de (9),

$$(-1)^{\delta} u'_{\mu} = a(2B_1^2 u_{\lambda} - B_2 v_{\lambda}) + (-1)^{\varepsilon} u_{\lambda},$$

de sorte que le quotient k'_{μ} , défini par la formule

$$u'_{\mu} = ak'_{\mu} + (-1)^{\delta+\varepsilon+\varrho} r,$$

se détermine par l'expression

$$(17) \quad (-1)^{\delta} k'_{\mu} = 2B_1(u_{\lambda} B_1 - v_{\lambda} A_1) + (-1)^{\varepsilon} k_{\lambda}.$$

Choisissons maintenant les nombres u_{λ} et u'_{μ} , tels que $\lambda = 1$, $\mu = 2$, il résulte finalement

$$(18) \quad k'_2 = 2u'_1 B_1 + (-1)^{\delta+\varepsilon} k_1.$$

VII. Sur les bases de seconde espèce.

Les deux congruences (6) et (8) de l'article précédent se présentent sous forme élégante, pourvu que a soit une base de seconde espèce; car, dans ce cas, l'exposant ε est un nombre pair, de sorte que les congruences susdites se présentent sous la forme

$$(1) \quad A_{2\nu} \equiv 1 \pmod{a}$$

$$(2) \quad u_{\lambda+2\nu} \equiv u_{\lambda} \pmod{a},$$

congruences qui sont valables, quels que soient les indices λ et ν .

Quant aux résidus des deux nombres

$$A_{2\nu+1}, u_{\lambda+2\nu+1},$$

nous ne savons dès à présent rien, pour une valeur quelconque de la base a . Mais, désignons pour abrégé a comme une base $4k+3$ de première ou de seconde classe, selon que l'équation

$$(3) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{k-1} 2, \quad a = 4k + 3$$

soit résoluble ou non, il est facile de démontrer la proposition :

I. Supposons satisfaite, pour des valeurs convenables des exposants δ et ε , une seule des deux congruences

$$(4) \quad A_{2r+1} \equiv (-1)^\delta \pmod{a}$$

$$(5) \quad u_{\lambda+2r+1} \equiv (-1)^\varepsilon u_\lambda \pmod{a},$$

la seconde est aussi applicable, et a est une base $4k + 3$ de première classe, et inversement.

Partons tout d'abord de la congruence (4), il existe, en vertu de la congruence (6) de l'article précédent, un exposant μ , tel que

$$(6) \quad A_1 \equiv (-1)^\mu \pmod{a},$$

congruence qui est impossible, à moins que a ne soit une base de seconde espèce, de sorte que l'équation de FERMAT correspondante se présente sous la forme

$$(7) \quad (A_1 + 1)(A_1 - 1) = aB_1^2.$$

Quant à cette équation, nous supposons que a soit une base réduite, savoir qu'elle ne contient aucun facteur quadratique.

Supposons ensuite que A_1 soit un nombre pair, les deux facteurs qui figurent au premier membre de (7) sont premiers entre eux, donc il existe une décomposition

$$(8) \quad B_1 = \sigma\tau,$$

où σ et τ sont premiers entre eux, de sorte que l'on aura, en vertu de (6),

$$(9) \quad A_1 - (-1)^\mu = a\tau^2, \quad A_1 + (-1)^\mu = \sigma^2,$$

ce qui conduira immédiatement à l'équation (3).

Soit, au contraire, A_1 un nombre impair, B_1 est nécessairement pair, car a est ou impair ou de la forme $4l+2$, et le terme aB_1^2 est multiple de 4. Posons donc, au lieu de (8),

$$(10) \quad B_1 = 2\sigma\tau,$$

il résulte, en vertu de (7),

$$A_1 - (-1)^\mu = 2a\tau^2, \quad A_1 + (-1)^\mu = 2\sigma^2,$$

ce qui donnera

$$\sigma^2 - a\tau^2 = (-1)^\mu,$$

équation qui est inadmissible.

En effet, l'hypothèse $\mu = 1$ est dès à présent exclue, parce que a est une base de seconde espèce, et c'est la même chose pour la valeur $\mu = 0$, car (A_1, B_1) est la plus petite solution de l'équation de FERMAT en question.

Inversement, partons de l'équation (3), il est bien connu que l'opération itérative du second ordre donnera

$$(av^2 - (-1)^k)^2 - a(uv)^2 = 1,$$

de sorte que l'existence d'une congruence de la forme (4) est évidente.

Enfin, prenons pour point de départ la congruence (5), la formule récursive

$$u_2 = u_1 A_1 + a v_1 B_1$$

donnera immédiatement, pour $\lambda = 1$, $\nu = 0$.

$$(-1)^\varepsilon u_1 \equiv u_1 A_1 \pmod{a},$$

ce qui n'est autre chose que la congruence (4), parce que a et u_1 sont premiers entre eux.

Étudions maintenant le cas général, où a est une base de seconde espèce, pour laquelle l'équation (3) n'est pas résoluble.

A cet effet, supposons tout d'abord pair le nombre A_1 , il existe des décompositions en deux facteurs premiers entre eux

$$(11) \quad a = pq, \quad B_1 = \sigma\tau,$$

de sorte que

$$A_1 + (-1)^\varepsilon = p\sigma^2, \quad A_1 - (-1)^\varepsilon = q\tau^2,$$

ce qui donnera

$$(12) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^\varepsilon 2, \quad 2A_1 = p\sigma^2 + q\tau^2.$$

Soit, au contraire, A_1 un nombre impair, B_1 est pair, de sorte que nous aurons, au lieu de (11), les décompositions

$$(13) \quad a = pq, \quad B_1 = 2\sigma\tau,$$

où p et q , σ et τ sont premiers entre eux, ce qui donnera, par le même procédé que dans le cas précédent,

$$(14) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^\varepsilon, \quad A_1 = p\sigma^2 + q\tau^2,$$

résultats qui sont bien connus.

Dans ce qui suit, nous désignons comme décomposition principale de la base a de seconde espèce la décomposition $a = pq$ que nous venons d'étudier.

Et, cette définition adoptée, nous avons à démontrer la proposition:

II. Soit $a = pq$ la décomposition principale de la base a , on aura, quels que soient les indices λ et ν ,

$$(15) \quad A_\lambda + (-1)^\varepsilon A_\nu \equiv 0 \pmod{p}, \quad A_\lambda - (-1)^\varepsilon A_\nu \equiv 0 \pmod{q}$$

$$(16) \quad u_\lambda + (-1)^\varepsilon u_\nu \equiv 0 \pmod{p}, \quad u_\lambda - (-1)^\varepsilon u_\nu \equiv 0 \pmod{q}.$$

Quant à la démonstration de cette proposition, nous pouvons nous borner à étudier par exemple les nombres A_n .

A cet effet, la formule réursive de LAGRANGE donnera

$$A_{\lambda} \pm (-1)^{\epsilon} A_{\lambda-1} = A_{\lambda-1} (A_1 \pm (-1)^{\epsilon}) + a B_1 B_{\lambda-1},$$

ce qui conduira immédiatement aux congruences (15).

En remarquant que nous avons, dans le Chapitre qui suit, à généraliser beaucoup les résultats que nous venons de mentionner, nous nous bonerons ici à démontrer cette autre proposition:

III. Soit $a = 4k + 1$ ou $a = 4k + 2$ une base réduite de seconde espèce, la décomposition fondamentale $a = pq$ conduira toujours à une équation de la forme

$$(17) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta},$$

tandis que l'hypothèse $a = 4k + 3$ donnera

$$(18) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta} 2.$$

En effet, soit p et q tous deux de la forme $4l + 1$ ou de la forme $4l + 3$, un des nombres σ et τ est pair, ce qui donnera immédiatement une équation de la forme (17). Et c'est la même chose dans le cas où un des nombres p et q est pair, de la forme $4l + 2$, le second impair de la forme $4m \pm 1$. Soit enfin $a = 4k + 3$, un des facteurs p et q est de la forme $4m + 1$ l'autre de la forme $4n + 3$, ce qui conduira à une équation de la forme (18).

VIII. Résolution d'une équation indéterminée.

Les résultats obtenus dans les deux articles précédents, nous permettent de résoudre, en positifs entiers, l'équation indéterminée

$$(1) \quad ax^2 \pm 2x = y^2,$$

où a est un positif entier donné qui n'est pas un carré exact.

On voit immédiatement que l'équation (1) se transforme en celle-ci

$$(2) \quad (ax \pm 1)^2 - ay^2 = 1,$$

de sorte qu'il s'agit de déterminer les solutions (A_n, B_n) de l'équation de FERMAT ayant la base a , qui satisfont à la condition

$$(3) \quad A_n \mp 1 \equiv 0 \pmod{a};$$

car, cette condition remplie, on aura comme solution de (1)

$$(4) \quad x_n = \frac{A_n \mp 1}{a}, \quad y_n = B_n,$$

ce qui donnera les propositions suivantes:

I. Soit a une base de seconde espèce, l'équation

$$(5) \quad ax^2 + 2x = y^2$$

est toujours résoluble, en admettant les solutions

$$(6) \quad x_n = \frac{A_{2n} - 1}{a}, \quad y_n = B_{2n}.$$

Quant à l'équation

$$(7) \quad ax^2 - 2x = y^2,$$

elle n'est pas généralement résoluble, pourvu que a soit une base de seconde espèce, car la résolubilité de cette équation exige la congruence

$$(8) \quad A_1 \equiv -1 \pmod{a}.$$

Dans ce cas, on aura comme solutions de (7)

$$(9) \quad \xi_n = \frac{A_{2n-1} + 1}{a}, \quad \eta_n = B_{2n-1}.$$

Soit ensuite a une base de seconde espèce qui satisfait à la condition

$$(10) \quad A_1 \equiv 1 \pmod{a}$$

l'équation (5) admet aussi les solutions

$$(11) \quad \xi_n = \frac{A_{2n-1} - 1}{a}, \quad \eta_n = B_{2n-1}.$$

II. Soit a une base de première espèce, les équations (5) et (7) sont toutes deux résolubles, en admettant les solutions

$$(12) \quad x_n = \frac{A_{4n} - 1}{a}, \quad y_n = B_{4n}$$

respectivement

$$(13) \quad \xi_n = \frac{A_{4n-2} + 1}{a}, \quad \eta_n = B_{4n-2}.$$

CHAPITRE III

Équations de Legendre.

IX. Propriété fondamentale des solutions.

Dans les Tables de DEGEN et de CAYLEY, on trouve beaucoup de fractions continues qui conduiront à des équations de la forme

$$(1) \quad (p\sigma)^2 - pq\tau^2 = (-1)^d p\omega,$$

où p est le plus grand commun diviseur de deux quelconques des trois termes de cette équation.

Bien que (1) soit irrésoluble, d'après notre définition de la résolubilité d'une équation de LAGRANGE, cette équation joue néanmoins, dans la théorie des équations de LAGRANGE, un rôle si important, qu'elle mérite une étude plus approfondie.

A cet effet, remarquons tout d'abord que l'équation (1) se présente aussi sous la forme

$$(2) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega,$$

où deux quelconques des trois coefficients p , q , ω sont premiers entre eux, nous désignons comme résoluble une telle équation, pourvu qu'elle soit satisfaite par des positifs entiers σ et τ , premiers entre eux.

On voit que (2) est une généralisation directe des équations considérées dans l'article VII; c'est pourquoi nous

désignons comme équations de LEGENDRE les équations (2); car les équations spéciales susdites jouent un rôle assez important dans les travaux de ce géomètre français, aussi distingué que modeste, mais souvent trop peu apprécié.

Quant à l'équation (2), nous supposons toujours

$$q > p > 1,$$

parce que l'hypothèse $p = 1$ conduira à l'équation de LAGRANGE ayant la base q . Du reste, nous pouvons permuter simultanément p et q , σ et τ , pourvu que l'exposant δ soit remplacé par $\delta + 1$.

De plus, nous disons pour abrégier que l'équation (2), supposée résoluble, et le paramètre correspondant ω appartiennent à la décomposition

$$a = pq$$

de la base a .

Ces définitions adoptées, nous avons à démontrer que les équations de LEGENDRE sont en quelque mesure analogues à celles de LAGRANGE.

Et, à cet effet, nous démontrerons tout d'abord le lemme fondamental:

I. Une solution quelconque de l'équation (2) est toujours élément d'une suite infinie de solutions de l'équation susdite.

Quant à la démonstration de ce lemme, nous multiplions (1) par l'équation de FERMAT correspondante

$$(3) \quad A_n^2 - aB_n^2 = (-1)^{n\epsilon}, \quad a = pq,$$

ce qui donnera, après la suppression du facteur commun p ,

$$(4) \quad \begin{cases} p(\sigma A_n + (-1)^q q \tau B_n)^2 - q(p \sigma B_n + (-1)^q \tau A_n)^2 = \\ = (-1)^{\delta+n\epsilon} \omega, \end{cases}$$

équation qui est de la même forme que (2), de sorte qu'il ne s'agit que de démontrer que les deux nombres

$$(5) \quad \sigma A_n + (-1)^{\varrho} q \tau B_n, \quad p \sigma A_n + (-1)^{\varrho} \tau A_n$$

sont premiers entre eux, pourvu que σ et τ le soient, tandis que l'exposant ϱ est un nombre quelconque, pair ou impair.

A cet effet, nous supposons $n = 1$, et nous écrivons les formules (5), ainsi obtenues, sous la forme

$$(6) \quad \sigma_m = A_1 \sigma_{m-1} + B_1 q \tau_{m-1}, \quad \tau_m = B_1 p \sigma_{m-1} + A_1 \tau_{m-1}.$$

Cherchons ensuite, de ces deux équations, les valeurs de σ_{m-1} et τ_{m-1} , il résulte, en vertu de (3),

$$(7) \quad (-1)^{\varepsilon} \sigma_{m-1} = A_1 \sigma_m - B_1 q \tau_m, \quad (-1)^{\varepsilon} \tau_{m-1} = A_1 \tau_m - B_1 p \sigma_m,$$

et il est évident que σ_m et τ_m sont premiers entre eux, pourvu que σ_{m-1} , et τ_{m-1} le soient, et inversement.

De plus, nous aurons évidemment

$$(8) \quad \sigma_m > \sigma_{m-1}, \quad \tau_m > \tau_{m-1};$$

c'est-à-dire qu'une solution quelconque (σ, τ) de l'équation (2) est élément d'une suite infinie

$$(9) \quad (\sigma_1, \tau_1) (\sigma_2, \tau_2) (\sigma_3, \tau_3) \dots (\sigma_n, \tau_n) \dots$$

de solutions de l'équation susdite.

Dans l'article qui suit, nous avons à étudier plus profondément la nature des suites ainsi obtenues.

X. Suites fermées et suites coordonnées.

Revenons maintenant aux formules (7) de l'article précédent, savoir

$$(1) \quad (-1)^{\varepsilon} \sigma_{m-1} = A_1 \sigma_m - B_1 q \tau_m, \quad (-1)^{\varepsilon} \tau_{m-1} = A_1 \tau_m - B_1 p \sigma_m,$$

où nous avons posé

$$(2) \quad A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\varepsilon, \quad a = pq,$$

il est évident que ces formules sont inapplicables pour $m = 1$, bien que les expressions qui figurent aux seconds membres de ces formules satisfassent à l'équation de LEGENDRE

$$(3) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta+\varepsilon} \omega.$$

Cela posé, nous avons à étudier, comme dans la théorie des équations de LAGRANGE, les deux hypothèses suivantes:

1°. La solution (s_1, t_1) , définie par les nombres qui figurent aux seconds membres des formules (1), appartient à la même suite que (σ_1, τ_1) , ce qui donnera nécessairement

$$s_1 = \sigma_1, \quad t_1 = \tau_1,$$

d'où il résulte, en vertu de (1),

$$(4) \quad (A_1 + (-1)^\varepsilon) \sigma_1 = qB_1\tau_1, \quad (A_1 - (-1)^\varepsilon) \tau_1 = p\sigma_1 B_1;$$

car il est évident que les facteurs de σ_1 et τ_1 qui figurent aux premiers membres de ces formules sont inégaux.

Or, les formules (4) donnent immédiatement

$$A_1^2 - aB_1^2 = 1,$$

de sorte que a est nécessairement une base de seconde espèce.

De plus, il résulte de (4) que B_1 est multiple des deux nombres σ_1 et τ_1 , premiers entre eux, de sorte que nous aurons

$$(5) \quad B_1 = k\sigma_1\tau_1,$$

où k est un positif entier; donc il résulte, en vertu de (4),

$$(6) \quad A_1 + (-1)^\varepsilon = kq\tau^2, \quad A_1 - (-1)^\varepsilon = kp\sigma_1^2,$$

ce qui donnera

$$k(p\sigma_1^2 - q\tau_1^2) = (-1)^{\epsilon+1} 2,$$

et cette équation n'est possible que pour les deux valeurs

$$k = 1, \quad k = 2.$$

Soit maintenant $k = 1$, on aura

$$(7) \quad \begin{cases} p\sigma_1^2 - q\tau_1^2 = (-1)^{\delta} 2 \\ 2A_1 = p\sigma_1^2 + q\tau_1^2, \quad B_1 = \sigma_1\tau_1, \end{cases}$$

tandis que l'hypothèse $k = 2$ donnera

$$(8) \quad \begin{cases} p\sigma_1^2 - q\tau_1^2 = (-1)^{\delta} \\ A_1 = p\sigma_1^2 + q\tau_1^2, \quad B_1 = 2\sigma_1\tau_1. \end{cases}$$

Introduisons ensuite, dans (6), les deux valeurs possibles de k , il résulte la proposition:

I. La décomposition $a = pq$ est la décomposition principale de la base a .

Remarquons ensuite que les dernières équations (7) ou (8) déterminent parfaitement les nombres σ_1 et τ_1 , pourvu que p et q , A_1 et B_1 soient connus, nous aurons cette autre proposition:

II. Les solutions des équations de LEGENDRE (7) ou (8) forment une seule suite

$$(9) \quad (\sigma_1, \tau_1) (\sigma_2, \tau_2) (\sigma_3, \tau_3) \dots (\sigma_n, \tau_n) \dots$$

Dans ce qui suit, nous désignons comme suite fermée la suite (9) ainsi définie.

2° Soit maintenant, dans l'équation (3),

$$\omega > 2,$$

la solution (σ_1, τ_1) est différente de (s_1, t_1) , définie par les expressions qui figurent aux seconds membres des équations (1), qui correspondent à l'hypothèse $m = 1$.

Dans ce qui suit, nous désignons comme réciproques les deux solutions (σ_1, τ_1) et (s_1, t_1) ainsi obtenues, et comme coordonnées les deux suites dont ces solutions réciproques sont les éléments primitifs.

Quant aux suites coordonnées, nous aurons, comme dans la théorie des équations de LAGRANGE,

$$(10) \quad ps_1\sigma_1 + qt_1\tau_1 = \omega A_1, \quad s_1\tau_1 + t_1\sigma_1 = \omega B_1,$$

de sorte qu'il résulte, en vertu des formules récursives,

$$(11) \quad ps_\mu\sigma_\nu + qt_\mu\tau_\nu = \omega A_{\mu+\nu-1}, \quad s_\mu\tau_\nu + t_\mu\sigma_\nu = \omega B_{\mu+\nu-1};$$

ces formules générales, valables quels que soient les indices μ et ν , sont analogues à celles connues de la théorie des équations de LAGRANGE.

De plus, nous désignons comme genre d'une équation de LEGENDRE le nombre total des suites formées de ses solutions, de sorte que les équations (7) ou (8) sont du genre 1, tandis que les genres de toutes les autres équations de LEGENDRE sont des nombres pairs.

XI. Sur la multiplication des équations de Legendre.

Le fondement d'une étude plus approfondie des équations de LEGENDRE est, comme dans la théorie des équations de LAGRANGE, la multiplication de telles équations qui correspondent à la même base.

A cet effet, supposons applicables les deux décompositions (p, q) et (p_1, q_1) de la base a , savoir supposons résolubles les deux équations

$$(1) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega, \quad p_1\sigma_1^2 - q_1\tau_1^2 = (-1)^{d_1} \omega_1$$

où nous avons posé

$$(2) \quad a = pq = p_1q_1,$$

la multiplication de ces deux équations, qui se présentent aussi sous la forme

$$(p\sigma)^2 - a\tau^2 = (-1)^d p\omega, \quad (p_1\sigma_1)^2 - a\tau_1^2 = (-1)^d p_1\omega_1,$$

donnera

$$(3) \begin{cases} (pp_1\sigma\sigma_1 + (-1)^\epsilon a\tau\tau_1)^2 - a(p\sigma\tau_1 + (-1)^\epsilon p_1\sigma_1\tau)^2 = \\ = (-1)^{d+d_1} pp_1\omega\omega_1. \end{cases}$$

Et il est évident que les résultats formels obtenus pour les équations de LAGRANGE sont aussi valables pour les équations de LEGENDRE, de sorte qu'il ne nous reste que de discuter la portée de la formule (3).

Quant à cette discussion, nous supposons que la base a se présente sous la forme

$$(4) \quad a = p q r s,$$

où deux quelconques de ces quatre facteurs sont premiers entre eux, ce qui permet les hypothèses

$$s = 1, \quad r = s = 1, \quad q = r = s = 1,$$

de sorte que la base réduite a peut contenir un nombre quelconque de facteurs premiers.

Supposons ensuite résolubles les deux équations

$$(5) \quad pq\sigma^2 - r s \tau^2 = (-1)^d \omega, \quad pr\sigma_1^2 - qs\tau_1^2 = (-1)^{d_1} \omega_1,$$

il résulte, en vertu de (3), une égalité de la forme

$$(6) \quad ps\sigma_2^2 - qr\tau_2^2 = (-1)^{d+d_1+1} \omega\omega_1,$$

où nous avons posé pour abrégé

$$(7) \quad \sigma_2 = p\sigma\tau_1 + (-1)^\epsilon r\sigma_1\tau, \quad \tau_2 = p\sigma\sigma_1 + (-1)^\epsilon s\tau\tau_1.$$

Cela posé, nous avons à démontrer la proposition essentielle:

I. Un diviseur commun des deux nombres σ_2 et τ_2 est aussi diviseur commun des deux paramètres ω et ω_1 .

En effet, cherchons des équations (7) les deux nombres σ et τ , il résulte, en vertu de la dernière des formules (5),

$$(-1)^{d_1} \omega_1 \sigma = r \sigma_1 \tau_2 - s \tau_1 \sigma_2, \quad (-1)^{d_1+\varepsilon} \omega_1 \tau = p \sigma_1 \sigma_2 - q \tau_1 \tau_2,$$

de sorte qu'un facteur commun de σ_2 et τ_2 est nécessairement diviseur de ω_1 , parce que σ et τ sont premiers entre eux.

Cherchons ensuite, des équations (7), les deux nombres σ_1 et τ_1 , nous verrons de même qu'un facteur commun de σ_2 et τ_2 divise aussi le paramètre ω .

Partons ensuite des deux équations

$$(8) \quad p\sigma^2 - qrs\tau^2 = (-1)^d \omega, \quad q\sigma_1^2 - prs\tau_1^2 = (-1)^{d_1} \omega_1,$$

nous aurons de même

$$(9) \quad pq(\sigma\sigma_1 \pm rs\tau\tau_1)^2 - rs(p\sigma\tau_1 \pm q\sigma_1\tau)^2 = (-1)^{d+d_1} \omega\omega_1,$$

et inversement, la multiplication des équations

$$(10) \quad p\sigma^2 - qrs\tau^2 = (-1)^d \omega, \quad pq\sigma_1^2 - rs\tau_1^2 = (-1)^{d_1} \omega_1$$

donnera

$$(11) \quad q(p\sigma\sigma_1 \pm rs\tau\tau_1)^2 - prs(\sigma\tau_1 \pm q\sigma_1\tau)^2 = (-1)^{d+d_1} \omega\omega_1.$$

Cela posé, remarquons que la proposition I est valable aussi pour ces dernières multiplications, il est évident que nous venons de démontrer une suite de propositions en ce qui concerne la multiplication des équations de LAGRANGE et de LEGENDRE, propositions desquelles nous nous bornerons à citer une seule:

II. Supposons résolubles les deux équations de
LEGENDRE

$$(12) \quad pq\sigma^2 - r\tau^2 = (-1)^d \varrho^z \omega, \quad pr\sigma_1^2 - qs\tau^2 = (-1)^{d_1} \varrho^z \omega_1,$$

où ω et ω_1 sont premiers entre eux, tandis que ϱ est un nombre premier qui ne divise ni ω ni ω_1 , cette autre équation

$$(13) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{d+d_1+1} \omega \omega_1$$

est résoluble aussi.

Quant à la multiplication des équations de LEGENDRE, appartenant à la même décomposition de base, nous aurons le théorème fondamental:

III. Supposons résolubles les deux équations de LEGENDRE

$$(14) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega, \quad p\sigma_1^2 - q\tau^2 = (-1)^{d_1} \omega_1, \quad pq = a,$$

où les paramètres ω et ω_1 sont premiers entre eux, l'équation de LAGRANGE

$$(15) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{d+d_1} \omega \omega_1$$

est résoluble aussi.

De plus, les formules générales donnent cette autre proposition, supplémentaire à la précédente:

IV. Supposons résolubles les deux équations

$$(16) \quad u^2 - av^2 = (-1)^d \omega, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{d_1} \omega_1, \quad a = pq,$$

où les paramètres ω et ω_1 sont premiers entre eux, l'équation de LEGENDRE

$$(17) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{d+d_1} \omega \omega_1$$

est résoluble aussi.

Du reste, tous les résultats généraux, en ce qui concerne la multiplication de deux équations de LAGRANGE, sont aussi applicables pour la multiplication ou de deux équations de LEGENDRE ou pour les multiplications d'une équation de LAGRANGE et d'une équation de LEGENDRE.

En effet, la multiplication d'un couple de suites coordonnées, appartenant à chacune des deux équations données, conduira toujours à deux couples de suites coordonnées de l'équation nouvelle, obtenues en appliquant toujours la multiplication positive, parce que la multiplication négative des suites susdites n'est autre chose que la multiplication positive des suites coordonnées.

De plus, appliquons toutes les multiplications, nous aurons trois fois deux des quatre suites de l'équation nouvelle, mais une seule fois les deux autres.

Et la proposition II donnera immédiatement le théorème fondamental:

V. Supposons que le paramètre ω de l'équation de LEGENDRE

$$(18) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta} \omega$$

contienne n facteurs premiers inégaux, le genre de cette équation est au plus égal à 2^{n-1} ou à 2^n , selon que ω est de la forme $4k+2$ ou non.

Enfin, nous avons encore à citer cette autre proposition:

VI. Supposons simultanément résolubles les deux équations de LEGENDRE

$$(19) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = \omega, \quad p\sigma_1^2 - q\tau_1^2 = -\omega,$$

p et q sont tous deux une somme de deux carrés premiers entre eux.

XII. Conditions de résolubilité.

Les résultats obtenus, dans l'article précédent, rattachent la résolubilité de l'équation de LEGENDRE

$$(1) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\delta} \omega, \quad a = pq,$$

à l'équation de LAGRANGE

$$(2) \quad u^2 - av^2 = \omega^2.$$

En effet, il est facile de démontrer la proposition essentielle:

I. Supposons impair le paramètre ω , la condition suffisante et nécessaire pour la résolubilité de l'équation (1) est, que l'équation (2) est résoluble, en admettant une solution de la forme

$$(3) \quad u = p\sigma^2 + q\tau^2, \quad v = 2\sigma\tau,$$

où σ et τ sont premiers entre eux.

Supposons tout d'abord résoluble l'équation (1), l'opération itérative du second ordre donnera

$$(p\sigma^2 + q\tau^2)^2 - a(2\sigma\tau)^2 = \omega^2;$$

c'est-à-dire que l'équation (2) est résoluble et admet une solution de la forme (3).

Inversement, partons de la formule (3), il est évident que l'équation quadratique

$$(4) \quad z^2 - 2uz + av^2 = 0$$

a les deux racines

$$2p\sigma^2, \quad 2q\tau^2,$$

et nous aurons, en résolvant (4),

$$z = u \pm \sqrt{u^2 - av^2} = u \pm \omega,$$

ce qui donnera immédiatement l'équation (1).

Soit, au contraire, ω un nombre pair, nous avons à remplacer l'équation (2) par celle-ci

$$(5) \quad u^2 - av^2 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2,$$

tandis que les conditions (3) deviennent

$$(6) \quad 2u = p\sigma^2 + q\tau^2, \quad v = \sigma\tau,$$

et le même procédé que dans le cas précédent conduira de nouveau des formules (5) et (6) à l'équation (1).

Soit particulièrement $\omega = 1$ ou $\omega = 2$, nous retrouvons les équations considérées dans l'article VII.

Quant à la résolubilité de l'équation (1), elle se rattache aussi à l'équation indéterminée

$$(7) \quad pn - qm = (-1)^{\delta} \omega,$$

toujours résoluble, parce que p et q sont premiers entre eux.

En effet, soustrayons les deux équations (1) et (7), il résulte

$$(8) \quad p(\sigma^2 - n) = q(\tau^2 - m),$$

ce qui donnera immédiatement la proposition essentielle:

II. L'équation (1) n'est jamais résoluble, à moins que n et m , déterminés par l'équation (7), ne soient résidus quadratiques, m de p et n de q , condition nécessaire qui n'est pas toujours suffisante aussi.

Soit donc par exemple n résidu quadratique de q , il existe un positif entier r , tel que

$$(9) \quad r^2 \equiv n \pmod{q},$$

de sorte qu'il s'agit de déterminer le nombre s , tel que

$$(10) \quad \sigma = qs \pm r.$$

A cet effet, posons

$$pr^2 - (-1)^d \omega = qk,$$

il résulte, en vertu de (1),

$$(11) \quad as^2 \pm 2prs + k = \tau^2,$$

et ensuite s est à déterminer, de sorte que le premier membre de l'équation (11) devienne un carré exact.

On voit que cette méthode est parfaitement analogue à celle mentionnée dans l'article VI, en ce qui concerne la résolution numérique d'une équation de LAGRANGE.

XIII. Application de l'opération itérative.

Dans mon premier Mémoire sur les équations de LAGRANGE, j'ai développé les formules fondamentales, en ce qui concerne l'opération itérative d'une équation de LAGRANGE.

Or, on voit immédiatement que ces formules sont applicables aussi sur l'équation

$$(p\sigma)^2 - a\tau^2 = (-1)^d p\omega, \quad a = pq,$$

où p est le plus grand commun diviseur de deux quelconques des trois termes; c'est-à-dire que les formules susdites qui correspondent à l'opération itérative du second ordre conduiront à des relations analogues pour l'équation de LEGENDRE

$$(1) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega.$$

En effet, supposons tout d'abord impair et plus grand que l'unité le paramètre ω , puis désignons par

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (s_1, t_1) \ (s_2, t_2) \ \dots \ (s_n, t_n) \ \dots \\ (\sigma_1, \tau_1) \ (\sigma_2, \tau_2) \ \dots \ (\sigma_n, \tau_n) \ \dots \end{array} \right.$$

deux suites coordonnées appartenant à l'équation (1), il existe deux suites coordonnées

$$(3) \quad \begin{cases} (u_1, v_1) & (u_2, v_2) & \dots & (u_n, v_n) & \dots \\ (u'_1, v'_1) & (u'_2, v'_2) & \dots & (u'_n, v'_n) & \dots \end{cases}$$

appartenant à l'équation de LAGRANGE

$$(4) \quad u^2 - av^2 = \omega^2,$$

telles que

$$(5) \quad u_{\lambda+\mu-1} = ps_\lambda s_\mu + qt_\lambda t_\mu, \quad v_{\lambda+\mu-1} = s_\lambda t_\mu + s_\mu t_\lambda$$

$$(6) \quad u'_{\lambda+\mu} = p\sigma_\lambda \sigma_\mu + q\tau_\lambda \tau_\mu, \quad v'_{\lambda+\mu} = \sigma_\lambda \tau_\mu + \sigma_\mu \tau_\lambda.$$

Soit particulièrement $\mu = \lambda$, nous aurons

$$(7) \quad u_{2\lambda-1} = ps_\lambda^2 + qt_\lambda^2, \quad v_{2\lambda-1} = 2s_\lambda t_\lambda$$

$$(8) \quad u'_{2\lambda} = p\sigma_\lambda^2 + q\tau_\lambda^2, \quad v'_{2\lambda} = 2\sigma_\lambda \tau_\lambda,$$

tandis que l'hypothèse $\mu = \lambda + 1$ donnera

$$(9) \quad u_{2\lambda} = ps_\lambda s_{\lambda+1} + qt_\lambda t_{\lambda+1}, \quad v_{2\lambda} = s_\lambda t_{\lambda+1} + t_\lambda s_{\lambda+1}$$

$$(10) \quad u'_{2\lambda+1} = p\sigma_\lambda \sigma_{\lambda+1} + q\tau_\lambda \tau_{\lambda+1}, \quad v'_{2\lambda+1} = \sigma_\lambda \tau_{\lambda+1} + \tau_\lambda \sigma_{\lambda+1}.$$

Quant à la solution primitive (u'_1, v'_1) de la seconde des suites (3), elle ne peut pas être obtenue par ces opérations, mais posons

$$(11) \quad ps_\lambda^2 - qt_\lambda^2 = (-1)^{d_\lambda} \omega,$$

nous aurons, quel que soit l'indice λ ,

$$(12) \quad (-1)^{d_\lambda} u'_1 = ps_\lambda \sigma_\lambda - qt_\lambda \tau_\lambda$$

$$(13) \quad (-1)^{d_\lambda} v'_1 = s_\lambda \tau_\lambda - \sigma_\lambda t_\lambda.$$

Soit particulièrement $\omega = 1$, les deux suites (3) coïncident avec la suite formée des solutions (A_n, B_n) de l'équation de FERMAT

$$x^2 - ay^2 = 1,$$

et nous aurons pour la suite (2)

$$\sigma_\lambda = s_{\lambda+1}, \quad \tau_\lambda = t_{\lambda+1}.$$

Quant à l'équation (1) dans laquelle ω est un nombre pair, nous aurons, pour $\omega > 2$,

$$(14) \quad 2u_{\lambda+\mu-1} = ps_\lambda s_\mu + qt_\lambda t_\mu, \quad 2v_{\lambda+\mu-1} = s_\lambda t_\mu + s_\mu t_\lambda$$

$$(15) \quad 2u'_{\lambda+\mu} = p\sigma_\lambda \sigma_\mu + q\tau_\lambda \tau_\mu, \quad 2v'_{\lambda+\mu} = \sigma_\lambda \tau_\mu + \sigma_\mu \tau_\lambda,$$

tandis que l'hypothèse $\omega = 2$ conduira à des formules analogues, en ce qui concerne l'équation de FERMAT ayant la base a .

Dans ce qui suit, nous désignons comme l'opération quadratique les formules spéciales (7) et (8), formules qui sont intéressantes parce qu'elles montrent que les nombres $u_{2\lambda-1}$ et $u'_{2\lambda}$ sont tous de la forme

$$(16) \quad p\alpha^2 + q\beta^2,$$

où α et β sont premiers entre eux.

Soit a une base de première espèce, les solutions (u, v) et (u', v') obtenues par l'opération quadratique épuisent toutes les solutions de l'équation (4), parce que les $(u_{2\lambda}, v_{2\lambda})$ et $(u'_{2\lambda+1}, v'_{2\lambda+1})$ correspondent à l'équation

$$u^2 - av^2 = -\omega^2.$$

Soit, au contraire, a une base de seconde espèce, toutes les solutions (u, v) et (u', v') correspondent à l'équation (4), mais il n'existe aucune relation de la forme (16) pour les nombres $u_{2\lambda+1}$ et $u'_{2\lambda}$.

Dans l'article qui suit, nous avons à déduire, pour les nombres susdits, des expressions analogues à (16), mais contenant d'autres nombres que p et q .

XIV. Sur la décomposition principale.

Revenons maintenant à l'équation de FERMAT

$$(1) \quad A_1^2 - aB_1^2 = (-1)^\epsilon$$

et à la congruence

$$(2) \quad A_2 \equiv (-1)^\epsilon \pmod{a}$$

qui s'y rattache, puis désignons par (σ_n, τ_n) une suite quelconque appartenant à l'équation de LEGENDRE

$$(3) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega, \quad a = pq,$$

les formules récursives

$$\sigma_{\lambda+2} = A_2 \sigma_\lambda + B_2 q \tau_\lambda, \quad \tau_{\lambda+2} = B_2 p \sigma_\lambda + A_2 \tau_\lambda$$

donnent, en vertu de (2), les congruences

$$(4) \quad \sigma_{\lambda+2} - (-1)^\epsilon \sigma_\lambda \equiv 0 \pmod{p}, \quad \tau_{\lambda+2} + (-1)^\epsilon \tau_\lambda \equiv 0 \pmod{q},$$

analogues à celles développées, dans l'article VI, pour les équations de LAGRANGE.

Les formules précédentes sont valables quelle que soit la base a .

Supposons maintenant que a soit une base de seconde espèce, ayant la décomposition principale

$$(5) \quad a = \pi \varrho,$$

puis supposons

$$A_1 \equiv (-1)^\varphi \pmod{\pi}, \quad A_1 \equiv (-1)^{\varphi+1} \pmod{\varrho},$$

les formules récursives

$$\sigma_{\lambda+1} = A_1 \sigma_\lambda + B_1 \varphi \tau_\lambda, \quad \tau_{\lambda+1} = B_1 \pi \sigma_\lambda + A_1 \tau_\lambda$$

donneront les congruences

$$(6) \quad \sigma_\lambda - (-1)^\varphi \sigma_\nu \equiv 0 \pmod{\varrho}, \quad \tau_\lambda + (-1)^\varphi \tau_\nu \equiv 0 \pmod{\pi},$$

valables quels que soient les indices λ et ν .

Étudions ensuite l'équation (3) pour laquelle $\omega > 2$, puis désignons par (s_n, t_n) la suite coordonnée à (σ_n, τ_n) , les formules fondamentales

$$(-1)^\varepsilon s_1 = A_1 \sigma_1 - B_1 \varrho \tau_1, \quad (-1)^\varepsilon t_1 = B_1 \pi \tau_1 - A_1 \sigma_1,$$

où ε est l'exposant défini par la formule (1), donnent de même

$$(7) \quad s_1 - (-1)^{\varepsilon+\varphi} \sigma_1 \equiv 0 \pmod{\varrho}, \quad t_1 + (-1)^{\varepsilon+\varphi} \tau_1 \equiv 0 \pmod{\pi},$$

de sorte que nous aurons, quels que soient les indices λ et ν ,

$$(7 \text{ bis}) \quad \begin{cases} s_\lambda - (-1)^{\varepsilon+\varphi} \sigma_\nu \equiv 0 \pmod{\varrho}, \\ t_\lambda + (-1)^{\varepsilon+\varphi} \tau_\nu \equiv 0 \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Cela posé, nous avons à étudier l'équation de LEGENDRE qui correspond à la décomposition principale de la base α , équation que nous supposons tout d'abord de la forme

$$(8) \quad \pi \alpha^2 - \varrho \beta^2 = (-1)^d,$$

et nous aurons le théorème essentiel:

I. Les équations de LAGRANGE et de LEGENDRE

$$(9) \quad u^2 - a v^2 = (-1)^\varepsilon \omega, \quad \pi s^2 - \varrho t^2 = (-1)^{d+\varepsilon} \omega$$

sont simultanément résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces équations sont du même genre.

En effet, partons de la première des équations (9), puis multiplions par (8), il résulte

$$\pi(u\alpha \pm \varrho v\beta)^2 - \varrho(\pi v\alpha \pm u\beta)^2 = (-1)^{d+\varepsilon} \omega,$$

ce qui est précisément la seconde des équations (9).

Inversement, partons de la dernière des équations (9), la multiplication par (8) donnera

$$(\pi \alpha s \pm q \beta t)^2 - a(\alpha t \pm \beta s)^2 = (-1)^\varepsilon \omega,$$

savoir la première des équations (9).

Supposons ensuite que la base a se présente sous la forme

$$(10) \quad a = p q r s,$$

où deux quelconques de ces quatre facteurs sont premiers entre eux, puis désignons par

$$(11) \quad a = \pi q; \quad \pi = p q, \quad q = r s$$

la décomposition principale de a , nous aurons le théorème curieux :

II. Les deux équations de LEGENDRE

$$(12) \quad p r \sigma^2 - q s \tau^2 = (-1)^\delta \omega, \quad p s \sigma_1^2 - q r \tau_1^2 = (-1)^{\delta+\varepsilon+1} \omega$$

sont en même temps résolubles ou non, et, en cas de résolubilité, ces deux équations sont du même genre.

A cet effet, multiplions par (8) chacune des équations (12), nous aurons la seconde de ces mêmes équations.

Dans ce qui suit, nous désignons comme simultanées les équations (12), de sorte que l'existence des équations simultanées exige que la base a contienne au moins trois facteurs premiers inégaux, car les résultats que nous venons de développer sont applicables aussi pour $s = 1$.

Revenons maintenant à la multiplication des équations (8) et (12), nous aurons, abstraction faite du signe,

$$(13) \quad \sigma_1 = q \alpha \tau \pm r \beta \sigma, \quad \tau_1 = q \alpha \sigma \pm s \beta \tau.$$

Remarquons ensuite que l'opération itérative du second ordre conduira de chacune des équations (12) à l'équation de LAGRANGE

$$(14) \quad u^2 - a v^2 = \omega^2,$$

puis posons, conformément aux formules (5) de l'article précédent,

$$u_1 = pr\sigma^2 + qst^2, \quad v_1 = 2\sigma\tau,$$

les formules

$$A_1 = \pi\alpha^2 + \varrho\beta^2, \quad B_1 = 2\alpha\beta,$$

conséquences immédiates des formules (13) et (14) de l'article VII, donnent, après un calcul direct,

$$pr(q\alpha\tau \pm r\beta\sigma)^2 + qs(p\alpha\sigma + s\beta\tau)^2 = u_1 A_1 \pm av_1 B_1$$

$$2(q\alpha\tau \pm r\beta\sigma)(q\alpha\sigma \pm s\beta\tau) = v_1 A_1 \pm u_1 B_1,$$

savoir l'élément (u_2, v_2) et l'élément (u'_1, v'_1) réciproque de (u_1, v_1) ; c'est-à-dire que nous venons de démontrer la proposition intéressante qui donnera la solution du problème indiqué à la fin de l'article précédent:

III. L'opération quadratique conduira, des équations simultanées (12), à toutes les solutions (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) d'un couple de suites coordonnées appartenant à l'équation (14).

Quant aux bases α de seconde espèce pour lesquelles l'équation de LEGENDRE qui correspond à la décomposition principale se présente sous la forme

$$(15) \quad \pi\alpha^2 - \varrho\beta^2 = (-1)^{\theta} 2,$$

les équations simultanées (12) deviennent, pour ω impair,

$$(16) \quad pr\sigma^2 - qst^2 = (-1)^{\epsilon} \omega, \quad ps\sigma_1^2 - qr\tau_1^2 = (-1)^{\theta+\epsilon+1} 2\omega,$$

et, pour ω pair,

$$(17) \quad pr\sigma^2 - qst^2 = (-1)^{\epsilon} \omega, \quad ps\sigma_1^2 - qr\tau^2 = (-1)^{\theta+\epsilon+1} \frac{\omega}{2},$$

tandis que l'équation (14) se présente, pour ω pair, sous la forme

$$(18) \quad u^2 - av^2 = \left(\frac{\omega}{2}\right)^2.$$

Du reste, les résultats que nous venons d'obtenir sont applicables aussi dans ce cas.

La deuxième des tables numériques jointes au présent Mémoire contient les solutions des diverses équations de LAGRANGE et de LEGENDRE qui correspondent à $a = 30$, la plus petite base qui contienne trois facteurs premiers inégaux.

CHAPITRE IV

Sur les hauteurs paires.

XV. Équations primitives.

Dans les recherches qui nous occupent ici, l'équation

$$(1) \quad u^2 - av^2 = \omega^2$$

joue un rôle si important qu'il est nécessaire de l'étudier plus profondément, ce qui exige avant tout une définition de l'idée d'une équation primitive.

A cet effet, nous avons à comparer l'équation (1) avec celles-ci

$$(2) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} \omega$$

$$(2 \text{ bis}) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} 2\omega,$$

et nous désignons l'équation (1)

comme primitive, pourvu qu'aucune des équations (2) et (2 bis) ne soit résoluble;

comme semi-primitive, pourvu que son genre soit plus élevé que celui de l'équation résoluble (2) ou (2 bis).

Quant aux équations semi-primitives, il existe donc au moins un couple de suites coordonnées (u_n, v_n) et (u'_n, v'_n) dont les éléments ne proviennent pas, par l'opération itérative du second ordre, d'une équation (2) ou (2 bis).

Nous désignons de telles suites comme suites coordonnées primitives de l'équation (1), et, en étudiant une équation

tion semi-primitive, nous supposons que la solution (u, v) en question appartienne à une suite primitive.

Quant à l'équation (1), supposée primitive, le paramètre ω est nécessairement de la hauteur 2 par rapport à la base a , et l'inverse est vraie aussi, pourvu que a ne soit pas de la forme $4k + 3$.

Soit maintenant, dans l'équation (1), supposée primitive, u et ω de parité différente, il existe une décomposition

$$(3) \quad a = pq; \quad q > p > 1,$$

telle que

$$(4) \quad u + (-1)^\delta \omega = p\sigma^2, \quad u - (-1)^\delta \omega = q\tau^2, \quad v = \sigma\tau,$$

où p et q , σ et τ sont premiers entre eux, ce qui donnera

$$(5) \quad p\sigma^2 + q\tau^2 = 2u, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^\delta 2\omega.$$

Soit, au contraire, u et ω tous deux impairs, δ est nécessairement pair, parce que av^2 est multiple de 8, et a est une base réduite; posons donc

$$(6) \quad v = 2\sigma\tau,$$

nous aurons, dans ce cas,

$$(7) \quad u + (-1)^\delta \omega = 2p\sigma^2, \quad u - (-1)^\delta \omega = 2q\tau^2,$$

savoir, au lieu de (5),

$$(8) \quad p\sigma^2 + q\tau^2 = u, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^\delta \omega.$$

Cela posé, il est facile de démontrer le théorème, fondamental dans la théorie des équations de LAGRANGE:

I. Les seules bases réduites qui n'admettent aucune équation primitive sont les nombres premiers et les bases de seconde espèce, qui ne contiennent que deux facteurs premiers et qui ne permettent de résoudre aucune des équations

$$(9) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\theta} 2,$$

où a est la base en question.

Supposons tout d'abord que la base a de seconde espèce contienne au moins trois facteurs premiers, il existe toujours une décomposition

$$a = pq,$$

différente de la décomposition principale. Choisissons ensuite les deux positifs entiers α et β , tels que $p\alpha$ et $q\beta$ sont premiers entre eux, puis posons

$$(10) \quad \pm \omega = p\alpha^2 - q\beta^2,$$

il est évident que l'équation de LEGENDRE

$$(11) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm \omega$$

est résoluble, ayant la solution (α, β) .

De plus, il est possible de choisir α et β , tel que ω devienne impair; donc l'équation ainsi déterminée

$$(12) \quad u^2 - av^2 = \omega^2$$

est primitive.

Quant aux bases de première espèce, nous démontrerons le lemme:

II. Une base de première espèce qui est un nombre composé, admet toujours des équations primitives.

On voit que le développement précédent conduira immédiatement au but, parce qu'une base de première espèce ne possède aucune décomposition principale.

Étudions ensuite les bases de seconde espèce, nous aurons de même:

III. Une base a de seconde espèce qui ne contient que deux facteurs premiers, et pour laquelle

l'équation (9) n'est pas résoluble, n'admet aucune équation primitive.

En effet, supposons primitive l'équation (12), puis désignons par (u_m, v_m) et (u_n, v_n) deux solutions quelconques d'une même suite primitive appartenant à l'équation susdite, nous aurons

$$(13) \quad p\sigma^2 + q\tau^2 = zu_m, \quad p\sigma_1^2 + q\tau_1^2 = zu_n$$

$$(14) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\theta} z\omega, \quad p\sigma_1^2 - q\tau_1^2 = (-1)^{\theta} z\omega,$$

où z est un des nombres 1 ou 2, ce qui donnera, en vertu de (14),

$$p(\sigma^2 - \sigma_1^2) = q(\tau^2 - \tau_1^2),$$

de sorte que nous aurons les deux congruences

$$(15) \quad \sigma^2 - \sigma_1^2 \equiv 0 \pmod{q} \quad \tau^2 - \tau_1^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

car p et q sont premiers entre eux.

De plus, il résulte, en vertu de (13),

$$z(u_m - u_n) = p(\sigma^2 - \sigma_1^2) + (\tau^2 - \tau_1^2),$$

de sorte que les congruences (15) donnent

$$u_m \equiv u_n \pmod{a},$$

ce qui est impossible, comme nous venons de le démontrer dans l'article VI.

IV. Une base de seconde espèce qui est un nombre composé, et pour laquelle l'équation (9) est résoluble, admet toujours des équations primitives.

Cette proposition est une conséquence immédiate des formules (10) et (11), parce que la base en question n'admet aucune décomposition principale.

Reste encore le cas où la base est un nombre premier,

mais une telle base n'admet aucune équation de LEGENDRE et par conséquent aucune équation primitive.

Cela posé, il est facile de démontrer encore deux théorèmes fondamentaux dans la théorie des équations de LAGRANGE, dont voici le premier :

V. Les seules bases réduites qui n'admettent pas la hauteur 2 sont les nombres premiers et les bases de seconde espèce des formes $4k+1$ ou $4k+2$, qui ne sont pas une somme de deux carrés, et qui ne contiennent que deux facteurs premiers.

En effet, il est évident que tous les paramètres qui admettent des équations primitives, admettent aussi la hauteur 2.

Quant aux bases de la forme $4k+3$, pour lesquelles l'équation (9) n'est pas résoluble, nous choisissons deux nombres impairs α et β , de sorte que α est premier avec $\alpha\beta$, le nombre ω défini par l'expression

$$\pm 2\omega = \alpha^2 - \alpha\beta^2$$

est impair, de sorte que les équations

$$(16) \quad u^2 - av^2 = \pm 2\omega, \quad u^2 - av^2 = \omega^2$$

sont toutes deux résolubles. Et il est évident que ω contient au moins un facteur premier de la hauteur 2, parce que le paramètre 2 est inapplicable.

Enfin, soit

$$(17) \quad a = \alpha^2 + \beta^2,$$

je dis que les équations primitives de la base a se présentent toujours sous la forme

$$(18) \quad u^2 - av^2 = -\omega^2,$$

équation qui est certainement résoluble pour $\omega = \alpha$ et $\omega = \beta$, ayant la solution $(\beta, 1)$ respectivement $(\alpha, 1)$.

En effet, supposons primitive une équation de la forme

$$u^2 - av^2 = \omega^2,$$

l'équation de LEGENDRE

$$p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega$$

est résoluble, ce qui est impossible, parce que la multiplication de cette équation par l'équation principale

$$p\alpha^2 - q\beta^2 = (-1)^e \omega$$

conduira à cette autre équation résoluble

$$u^2 - av^2 = (-1)^{d+e} \omega.$$

Reste encore le second des deux théorèmes susdits, théorème qui se présente sous la forme la plus simple, pourvu que la base a ne soit ni une base de seconde espèce de la forme $\alpha^2 + \beta^2$ ni une base $4k + 3$ qui n'admet pas le paramètre ± 2 . Posons ensuite

$$(19) \quad \omega = \pi_1^{\alpha_1} \pi_2^{\alpha_2} \dots \pi_n^{\alpha_n},$$

où les nombres π_r sont les facteurs premiers de ω , nous avons à démontrer le théorème:

VI. Supposons que les n facteurs $\pi_r^{\alpha_r}$ soient tous des hauteurs 1 ou 2 par rapport à la base a , qui satisfait aux conditions susdites, il existe une décomposition

$$(20) \quad a = pq, \quad 1 \leq p < q \leq a,$$

telle que l'équation

$$(21) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^d \omega$$

est résoluble, et le genre de cette équation a la valeur maximum 2^{n-1} ou 2^n , selon que a est de la forme $4k + 2$ ou non.

Soit π_r un des facteurs premiers de ω , il existe une décomposition

$$a = p_r q_r, \quad 1 \leq p_r < q_r \leq a,$$

de sorte que l'équation

$$p_r \sigma^2 - q_r \tau^2 = (-1)^{j_r} \pi^{a_r}$$

est résoluble, et la multiplication des n équations ainsi obtenues conduira immédiatement au théorème VI.

Les modifications de ce théorème qui exigent les bases exclues sont évidentes.

Remarquons, en passant, que le théorème VI est certainement valable, pourvu que tous les facteurs premiers du paramètre ω soient des hauteurs 1 ou 2 par rapport à la base a .

XVI. Bases de première espèce.

Pour illustrer par un exemple assez général les développements précédents, en ce qui concerne les bases de première espèce, nous partons de l'équation de FERMAT

$$(1) \quad A_n^2 - a B_n^2 = (-1)^n,$$

et nous démontrerons tout d'abord la proposition :

I. Soit a une base de première espèce, quelconque du reste, les équations de LAGRANGE

$$(2) \quad u^2 - av^2 = \pm A_{2\nu+1}^2$$

sont toujours résolubles, quel que soit l'indice impaire $2\nu + 1$.

Supposons tout d'abord a impair, l'équation

$$(3) \quad s^2 - at^2 = \pm 2A_{2\nu+1}$$

est résoluble, ayant les solutions

$$(4) \quad (A_{2\nu+1} + 1, B_{2\nu+1}) \quad (A_{2\nu+1} - 1, B_{2\nu+1}).$$

Soit ensuite a un nombre pair, savoir

$$(5) \quad a = 2a_1,$$

a_1 est nécessairement impair, et, dans ce cas, l'équation de LEGENDRE

$$(6) \quad 2\sigma^2 - a_1\tau^2 = \pm A_{2\nu+1}$$

est résoluble, admettant les solutions

$$(7) \quad \left(\frac{A_{2\nu+1} - 1}{2}, B_{2\nu+1} \right) \quad \left(\frac{A_{2\nu+1} + 1}{2}, B_{2\nu+1} \right).$$

Et l'équation (2) provient de (3) respectivement de (6), par l'opération itérative du second ordre.

Posons particulièrement

$$a = \alpha^2 + 1, \quad A_1 = \alpha,$$

la valeur minimum des paramètres applicables est 2α ou $4\alpha \mp 3$, selon que α est pair ou impair, ce qui donnera immédiatement la proposition:

II. Soit α un nombre impair, plus grand que l'unité, mais quelconque du reste, l'équation

$$(8) \quad u^2 - (\alpha^2 + 1)v^2 = \alpha^2$$

est toujours primitive.

Supposons maintenant que la base paire $\alpha^2 + 1$ contienne au moins deux facteurs premiers impairs, il existe encore une décomposition en somme de deux carrés, savoir

$$(9) \quad a = \alpha^2 + 1 = \beta^2 + \gamma^2,$$

où β et γ sont tous deux impairs, et les équations

$$(10) \quad u^2 - av^2 = \beta^2, \quad u^2 - av^2 = \gamma^2,$$

ayant, pour les paramètres négatifs, les solutions $(\gamma, 1)$ respectivement $(\beta, 1)$, sont certainement primitives, parce que $\beta < \alpha$ et $\gamma < \alpha$.

Quant aux équations (10), nous aurons la proposition:

III. Il existe une décomposition

$$(11) \quad a = 2pq,$$

de sorte que la première des équations (10) appartient à $(p, 2q)$, la seconde à $(2p, q)$.

En effet, multiplions les deux équations évidentes

$$\alpha^2 - a \cdot 1^2 = -1, \quad \gamma^2 - a \cdot 1^2 = -\beta^2,$$

nous aurons

$$(12) \quad (\alpha\gamma - a)^2 - a(\alpha - \gamma)^2 = \beta^2;$$

posons donc

$$\alpha - \gamma = 2\sigma\tau,$$

il résulte, en vertu de (12),

$$(13) \quad \begin{cases} \alpha\gamma - a + (-1)^d \beta = 2p\sigma^2 \\ \alpha\gamma - a - (-1)^d \beta = 4q\tau^2, \end{cases}$$

ce qui donnera l'équation de LEGENDRE correspondante

$$(14) \quad p\sigma^2 - 2q\tau^2 = (-1)^d \beta.$$

Partons ensuite des congruences

$$\alpha\gamma + (-1)^d \beta \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\alpha\gamma - (-1)^d \beta \equiv 0 \pmod{q},$$

tirées directement des équations (13), nous aurons, en multipliant par γ ces deux congruences, puis appliquant la formule (9),

$$(15) \quad \begin{cases} \alpha\beta - a + (-1)^d \gamma \equiv 0 \pmod{p} \\ \alpha\beta - a - (-1)^d \gamma \equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

De plus, la différence

$$\begin{aligned} (\alpha\beta - a + (-1)^d \gamma) - (\alpha\gamma - a - (-1)^d \gamma) = \\ \alpha(\beta - \gamma) + (-1)^d (\beta + \gamma) \end{aligned}$$

étant de la forme $4k + 2$, on aura, en vertu de (15),

$$\begin{aligned} \alpha\beta - a - (-1)^d \gamma &= 4ps^2 \\ \alpha\beta - \alpha + (-1)^d \gamma &= 2q\tau^2, \end{aligned}$$

où

$$a - \gamma = 2st,$$

ce qui donnera finalement la seconde des équations susdites

$$(16) \quad 2ps^2 - qt^2 = (-1)^{d+1} \gamma.$$

Quant aux bases spéciales qui nous occupent ici, il nous reste encore à démontrer cette autre proposition :

IV. Deux couples de suites coordonnées, appartenant à l'équation primitive

$$(17) \quad u^2 - a\delta = \beta^2 \gamma^2, \quad a = 2a_1,$$

qui est au moins du genre 4, correspondent à la décomposition $(2, a_1)$.

En effet, multiplions les deux équations

$$\gamma^2 - a \cdot 1^2 = -\beta^2, \quad \beta^2 - a \cdot 1^2 = -\gamma^2,$$

il résulte

$$(18) \quad (a \pm \beta\gamma)^2 - a(\beta \pm \gamma)^2 = \beta^2 \gamma^2.$$

Posons ensuite

$$u = a + \beta\gamma, \quad v = \beta + \gamma,$$

nous aurons, en vertu de (9),

$$\begin{aligned} u + \beta + \gamma &= (\beta + \gamma)^2 = 4\sigma^2; \quad \sigma = \frac{\beta + \gamma}{2} \\ u - \beta\gamma &= a = 2a_1\tau^2; \quad \tau = 1, \end{aligned}$$

ce qui conduira à l'équation de LEGENDRE

$$(19) \quad 2\sigma^2 - a_1 x^2 = \pm \beta\gamma.$$

La seconde des équations (18) donnera de même

$$u = a - \beta\gamma, \quad v = \beta - \gamma,$$

de sorte que l'on aura ici

$$\begin{aligned} u + \beta\gamma &= a = 2a_1 x^2; \quad \sigma = 1 \\ u - \beta\gamma &= (\beta - \gamma)^2 = 4\sigma^2; \quad \sigma = \frac{\beta - \gamma}{2}, \end{aligned}$$

ce qui conduira de nouveau à l'équation (19), équation qui a par conséquent les deux solutions

$$(20) \quad \left(\frac{\beta - \gamma}{2}, 1 \right) \quad \left(\frac{\beta + \gamma}{2}, 1 \right).$$

XVII. Bases de seconde espèce.

Quant aux bases de seconde espèce, nous partons de l'équation classique

$$(1) \quad A_{2\nu}^2 - 2B_{2\nu}^2 = (-1)^\nu,$$

équation qui conduira immédiatement à la proposition:

I. Soit $\nu \geq 1$, l'équation

$$(2) \quad u^2 - (A_{2\nu+1}^2 + 2)v^2 = A_{2\nu+1}^2$$

est toujours primitive.

Quant à l'équation (2), il résulte immédiatement, en vertu de (1), qu'elle admet la solution

$$(3) \quad u = 2B_{2\nu+1}, \quad v = 1.$$

Supposons ensuite impair le paramètre ω , les deux équations

$$\begin{aligned} u^2 - (A_{2\nu+1}^2 + 2)v^2 &= (-1)^\omega \omega \\ u^2 - (A_{2\nu+1}^2 + 2)v^2 &= (-1)^{\omega+1} 2\omega \end{aligned}$$

sont simultanément résolubles ou non, et nous savons que ces équations sont toujours irrésolubles, à moins que

$$\omega \geq 2A_{2\nu+1} - 1;$$

c'est-à-dire que le paramètre

$$\omega = A_{2\nu+1}$$

est toujours exclu pour $\nu \geq 1$, et l'équation (2) est primitive.

On voit que l'hypothèse $\nu = 0$ conduira à l'équation

$$u^2 - 3v^2 = 1,$$

qui ne présente aucun intérêt à ce point de vue.

La plus petite base définie par l'expression

$$(4) \quad a_\nu = A_{2\nu+1}^2 + 2$$

est le nombre

$$(5) \quad a_1 = 7^2 + 2 = 51,$$

ce qui est précisément la plus petite base composée qui admette un des paramètres ± 2 .

La troisième des tables numériques, jointes au présent Mémoire, donnera les solutions des équations de LAGRANGE et de LEGENDRE ayant la base 51.

Revenons maintenant à l'équation (2), puis appliquons les formules

$$2B_{2\nu+1} - A_{2\nu+1} = A_{2\nu}, \quad 2B_{2\nu+1} + A_{2\nu+1} = A_{2\nu+2},$$

il est évident que l'équation susdite conduira à l'équation de LEGENDRE

$$(6) \quad A_{2\nu} \sigma^2 - A_{2\nu+2} \tau^2 = -2A_{2\nu+1},$$

ayant la solution (1, 1).

Multiplions ensuite (6) par l'équation principale

$$A_{2\nu+1}^2 - (A_{2\nu+1}^2 + 2) \cdot 1^2 = -2,$$

il résulte l'équation simultanée

$$(7) \quad A_{2\nu} s^2 - A_{2\nu+1} t^2 = A_{2\nu+1},$$

qui admet la solution $(B_{2\nu+1}, B_{2\nu})$.

XVIII. Sur les bases $4p^4 + 1$.

Il résulte immédiatement du théorème I de l'article XV que le nombre

$$(1) \quad a = 4\alpha^4 + 1,$$

ne peut jamais être premier, pourvu que $\alpha > 1$, car l'équation

$$(2) \quad u^2 - av^2 = 4\alpha^2$$

est primitive.

Or, l'identité évidente

$$(3) \quad (2\alpha^2 - 1)^2 + (2\alpha)^2 = 4\alpha^4 + 1$$

donnera, pour $\alpha > 1$, deux décompositions différentes en sommes de deux carrés de la base a ; de sorte que a ne peut être un nombre premier que dans le seul cas

$$\alpha = 1, \quad \alpha = 5.$$

Quant à la formule (3), on voit que le carré pair qui figure au second membre est un bicarré, pourvu que

$$(4) \quad a = 2k^2,$$

et seulement dans ce cas.

Quant au carré impair, l'équation classique

$$(5) \quad A_r^2 - 2B_r^2 = (-1)^\nu$$

donnera immédiatement la proposition:

I. Le carré impair qui figure au premier membre de l'équation (3) est un bicarré, pourvu que

$$(6) \quad a = B_{2\nu+1},$$

et seulement dans ce cas.

Appliquons ensuite cette autre identité évidente

$$(7) \quad 4\alpha^4 + 1 = ((\alpha - 1)^2 + \alpha^2) (\alpha^2 + (\alpha + 1)^2),$$

il est facile de déterminer α , tel que la base a se présente sous la forme

$$(8) \quad 4\alpha^4 + 1 = \gamma^2 (\alpha^2 + (\alpha \pm 1)^2),$$

problème qui se rattache aussi à l'équation (5), car nous aurons la proposition :

II. Un des deux facteurs qui figurent au second membre de (8) est un carré exact, pourvu que

$$(9) \quad \alpha = \frac{A_{2\nu+1} \mp 1}{2},$$

et seulement dans ce cas.

Soit par exemple $\nu = 1$, on aura

$$\alpha = \frac{A_3 - 1}{2} = 3, \quad a = 325 = 5^2 \cdot 13$$

$$\alpha = \frac{A_3 + 1}{2} = 4, \quad a = 1025 = 5^2 \cdot 41.$$

XIX. Applications diverses.

Il nous semble utile d'éclaircir, par des exemples convenables, les développements précédents.

Exemple I. L'équation

$$(1) \quad u^2 - 145v^2 = \pm 144$$

du genre 4 est semi-primitive, car la solution (17, 1) de cette équation conduira à l'équation de LEGENDRE

$$(2) \quad 5\sigma^2 - 29\tau^2 = \pm 24,$$

ayant la solution (1, 1).

Exemple II. L'équation

$$(3) \quad u^2 - 442v^2 = \pm 441$$

du genre 4 est aussi semi-primitive, parce que la solution (47, 2) correspond à l'équation de LEGENDRE

$$(4) \quad 13\sigma^2 - 34\tau^2 = -21,$$

satisfaite par (1, 1).

Exemple III. Le nombre

$$(5) \quad 130 = 11^2 + 3^2 = 9^2 + 7^2$$

est la plus petite base de première espèce qui contienne trois facteurs premiers inégaux.

La première des décompositions (5) conduira aux deux équations primitives

$$(6) \quad 23^2 - 130 \cdot 2^2 = 9, \quad 479^2 - 130 \cdot 42^2 = 121$$

qui correspondent aux équations de LEGENDRE

$$(7) \quad 10\sigma^2 - 13\tau^2 = \pm 3, \quad 5\sigma^2 - 26\tau^2 = \pm 11,$$

ayant les solutions (1, 1) respectivement (7, 3).

Quant à la seconde décomposition (5), elle ne conduira qu'à la seule équation primitive

$$(8) \quad 137^2 - 130 \cdot 12^2 = 49,$$

à laquelle correspond l'équation de LEGENDRE

$$(9) \quad 2\sigma^2 - 65\tau^2 = \pm 7,$$

satisfaite par (6, 1).

L'équation primitive du genre 4, déterminée par les égalités

$$(10) \quad 67^2 - 130 \cdot 8^2 = 163^2 - 180 \cdot 14^2 = 33^2$$

conduira à l'équation de LEGENDRE

$$(11) \quad 2\sigma^2 - 65\tau^2 = \pm 33,$$

également du genre 4, car ses deux solutions (4, 1) et (7, 1) n'appartiennent pas au même couple de suites coordonnées.

Les nombres premiers

$$3 \quad 7 \quad 11 \quad 43$$

sont tous de la hauteur 2 par rapport à la base 130.

L'équation

$$(12) \quad u^2 - 130v^2 = \pm 129$$

est résoluble et du genre 4, parce que 3 et 43 appartiennent à la même décomposition de 130.

Au contraire, aucun des nombres

$$21 \quad 33 \quad 77$$

n'est applicable comme paramètre de la base 130, parce que les deux nombres premiers, contenus dans chacun de ces nombres, appartiennent à des décompositions différentes de 130.

Mais l'équation

$$(13) \quad u^2 - 130v^2 = \pm 231$$

est résoluble et du genre 8.

La dernière des quatre tables numériques jointes au présent Mémoire contient les solutions des équations de LAGRANGE et de LEGENDRE qui se rattachent à la base 130.

CHAPITRE V

Sur l'opération du troisième ordre.

XX. Sur la multiplication des équations.

L'ensemble des équations de LAGRANGE

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\omega} \omega,$$

déterminées par les conditions

$$2 \leq a \leq 102, \quad 2 \leq \omega \leq 1000,$$

ne contient qu'une seule équation dont le genre ne soit pas une puissance de 2, savoir

$$u^2 - 37v^2 = \pm 924.$$

La détermination du genre de cette équation exige donc, à ce point de vue, des recherches ultérieures sur la multiplication de plusieurs équations de LAGRANGE.

A cet effet, désignons par

$$(s_r, t_r), \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

une solution d'une suite quelconque appartenant à l'équation

$$(1) \quad s_r^2 - at_r^2 = (-1)^{\omega_r} \omega_r,$$

il est évident que, dans la multiplication positive de ces équations, que nous désignons simplement par le symbole

$$(2) \quad (s_1, t_1) (s_2, t_2) (s_3, t_3) \dots,$$

et qui est définie par les formules

$$(3) \quad (s_p s_q + a t_p t_q)^2 - a (s_p t_q + s_q t_p)^2 = (-1)^{d_p + d_q} \omega_p \omega_q,$$

nous pouvons permuer arbitrairement les facteurs de ce produit symbolique, et que l'on peut remplacer par exemple les deux facteurs (s_2, t_2) et (s_3, t_3) par leur produit, défini par la formule (3), de sorte que le produit (2) se présente aussi sous la forme

$$(4) \quad (s_1, t_1) ((s_2, t_2) (s_3, t_3)) (s_4, t_4) \dots$$

Posons ensuite pour abrégé

$$S_1 = (+) (s_1, t_1) (s_2, t_2), \quad S_2 = (+) (s_1, t_1) (s_3, t_3) \\ T_1 = (-) (s_1, t_1) (s_2, t_2), \quad T_2 = (-) (s_1, t_1) (s_3, t_3),$$

nous avons à démontrer les identités

$$(5) \quad (+) S_1 T_2 = (+) S_2 T_1 = (+) (s_2, t_2) (s_3, t_3)$$

$$(6) \quad (-) S_1 T_2 = (-) S_2 T_1 = (-) (s_2, t_2) (s_3, t_3).$$

A cet effet, désignons par (s'_r, t'_r) une solution de la suite coordonnée à celle qui contient (s_r, t_r) , nous aurons

$$T_1 = (+) (s'_1, t'_1) (s_2, t_2), \quad T_2 = (+) (s'_1, t'_1) (s_3, t_3),$$

ce qui donnera la multiplication positive

$$(+) S_1 T_2 = (s_1, t_1) (s_2, t_2) (s'_1, t'_1) (s_3, t_3);$$

permutons ensuite les deux premiers de ces facteurs, puis remarquons que la multiplication positive des deux suites coordonnées fait disparaître ces facteurs symboliques, de sorte que nous aurons finalement

$$(+) S_1 T_2 = (+) (s_2, t_2) (s_3, t_3)$$

savoir la première des formules (5).

Et l'on démontrera, par le même procédé, les autres formules en question, formules que l'on trouvera aussi

facilement par un calcul direct, en appliquant l'identité (3) et la définition analogue de la multiplication négative, savoir

$$(s_p s_q - a t_p t_q)^2 - a (s_p t_q - s_q t_p)^2 = (-1)^{\delta p + \delta q} \omega_p \omega_q.$$

Cela posé, nous partons des quatre nombres

$$(7) \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4,$$

premiers entre eux deux à deux, et les six équations de la forme

$$(\alpha, \beta) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta} \omega_{\alpha} \omega_{\beta},$$

où α et β sont deux quelconques des indices des nombres (7), il est évident que la multiplication des deux équations (α, β) et (γ, δ) conduira toujours à cette autre équation

$$(8) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\epsilon} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4.$$

Et nous avons à démontrer la proposition:

I. Les six produits de la forme $(\pm) (\alpha, \beta) (\gamma, \delta)$ donnent précisément trois couples de suites coordonnées appartenant à l'équation (8).

En effet, appliquons les identités (5) et (6), nous aurons, en appliquant des signes convenables dans les multiplications, des identités de la forme

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) (\alpha, \gamma) &= (\beta, \gamma) \\ (\alpha, \gamma) (\gamma, \delta) &= (\alpha, \delta), \end{aligned}$$

ce qui donnera, toujours avec des signes convenables dans la multiplication,

$$(\alpha, \delta) (\beta, \gamma) = (\alpha, \beta) (\gamma, \delta),$$

et il est évident qu'il existe précisément trois identités de cette forme, de sorte que notre proposition est démontrée.

XXI. Sur la hauteur 3.

Désignons maintenant par

$$(1) \quad \omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_3 \quad \omega_4$$

quatre nombres premiers impairs qui sont tous de la hauteur 3 par rapport à la base a .

Supposons ensuite résolubles les six équations de la forme

$$(\alpha, \beta) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta\alpha, \beta} \omega_\alpha \omega_\beta,$$

nous avons récemment démontré que ces équations sont du genre 2, et que les quatre équations de la forme

$$(\alpha, \beta, \gamma) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{\delta\alpha, \beta + \delta\alpha, \gamma} \omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma$$

sont résolubles aussi et du genre 2.

Cela posé, nous avons ici à démontrer les propositions suivantes:

I. Supposons résolubles les quatre équations (α, β, γ) , les six équations (α, β) sont résolubles aussi.

A cet effet, désignons pour abrégé par les symboles

$$(\alpha^r) \quad (\alpha^r, \beta^s, \gamma^t, \dots)$$

les équations qui correspondent aux paramètres

$$\omega_\alpha^r, \quad \omega_\alpha^r \omega_\beta^s \omega_\gamma^t \dots,$$

nous aurons des identités de la forme

$$\begin{aligned} (\pm) (\alpha^3) (\alpha, \beta, \gamma) &= (\alpha^2, \beta, \gamma) \\ (\pm) (\beta^3) (\alpha^2, \beta^2, \gamma) &= (\alpha^2, \beta^2, \gamma) \\ (\pm) (\alpha, \beta, \gamma) (\alpha^2, \beta^2, \gamma) &= (\alpha, \gamma^2) \\ (\mp) (\alpha, \beta, \gamma) (\alpha^2, \beta^2, \gamma) &= (\beta, \gamma^2), \end{aligned}$$

où les signes sont à choisir convenablement dans toutes les multiplications en question, car aucun des paramètres ω_α^2 n'est applicable, parce que ω_α est de la hauteur 3.

Et l'on aura de même, avec un choix convenable du signe,

$$(\pm) (\gamma^3) (\alpha, \gamma^2) = (\alpha, \gamma),$$

de sorte que ces multiplications conduiront, des quatre équations (α, β, γ) , aux six équations (α, β) .

II. L'équation

$$(2) \quad u^2 - \alpha v^2 = (-1)^\varepsilon \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4$$

est résoluble et du genre 6.

Il résulte, en vertu de la proposition I de l'article précédent, que l'équation (2) est résoluble et au moins du genre 6, car nous avons démontré l'existence de trois couples de suites coordonnées appartenant à cette équation.

Supposons ensuite que l'équation (2) admette encore une suite de solutions S , puis désignons par T et T' un des trois couples de suites coordonnées que nous venons de déterminer, nous aurons, en choisissant convenablement les signes,

$$(\pm) ST = (\alpha^2, \beta^2), \quad (\mp) ST = (\gamma^2, \delta^2),$$

ce qui donnera, toujours avec un choix convenable du signe,

$$(\pm) (ST)T' = (\alpha^2, \beta^2)T' = S,$$

de sorte que S peut être obtenue par une multiplication convenable de certaines équations (α, β) , ce qui est impossible, parce que de telles multiplications conduiront seulement aux trois couples, déterminés par la proposition I de l'article précédent.

Remplaçons maintenant un des ω_j par le nombre 4, posons par exemple

$$\omega_4 = 4,$$

puis supposons résolubles les trois équations

$$(\alpha) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{j_\alpha} 4 \omega_\alpha; \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

les trois équations (α, β) sont résolubles aussi, et nous aurons, par le même procédé que dans le cas précédent, cette autre proposition:

III. L'équation

$$(3) \quad u^2 - av^2 = (-1)^e 4 \omega_1 \omega_2 \omega_3$$

est résoluble et du genre 6.

Enfin, supposons que 2 soit, par rapport à la base a , de la hauteur 3, savoir qu'une équation de la forme

$$(4) \quad u^2 - av^2 = (-1)^f 32$$

soit résoluble, puis supposons que les trois équations

$$(5) \quad u^2 - av^2 = (-1)^{j_\alpha} 8 \omega_\alpha; \quad \alpha = 1, 2, 3$$

soient résolubles aussi, les trois nombres premiers ω_α sont de la hauteur 3, par rapport à la base a , et nous aurons ici la proposition:

IV. L'équation

$$(6) \quad u^2 - av^2 = (-1)^e 8 \omega_1 \omega_2 \omega_3$$

est résoluble et du genre 6.

On voit du reste que cette dernière proposition est valable, pourvu que les équations (4) et (5) soient remplacées par celles-ci

$$u^2 - av^2 = (-1)^f 2^{3n-4}, \quad u^2 - av^2 = (-1)^{j_\alpha} 2^n,$$

où il faut supposer $n \geq 3$.

Dans l'article qui suit, nous avons à éclaircir, par des exemples convenables, les développements précédents.

XXII. Exemples.

Les nombres premiers

$$3 \quad 7 \quad 11$$

sont de la hauteur 3 par rapport à la base 37, car on aura

$$(3, 4) \quad 5^2 - 37 \cdot 1^2 = -12, \quad (7, 4) \quad 3^2 - 37 \cdot 1^2 = -28, \\ (11, 4) \quad 9^2 - 37 \cdot 1^2 = 44,$$

et le paramètre 4 est exclu.

Cela posé, nous aurons de même

$$(3, 7) \quad 4^2 - 37 \cdot 1^2 = -21, \quad (3, 11) \quad 2^2 - 37 \cdot 1^2 = -33, \\ (7, 11) \quad 15^2 - 37 \cdot 2^2 = 77,$$

ce qui donnera les trois couples de suites coordonnées appartenant à l'équation

$$(1) \quad u^2 - 37v^2 = \pm 924,$$

savoir

$$I_1 \quad 1^2 - 37 \cdot 5^2 = -924 \quad I_2 \quad 179^2 - 37 \cdot 29^2 = 924 \\ II_1 \quad 31^2 - 37 \cdot 1^2 = 924 \quad II_2 \quad 149^2 - 37 \cdot 25^2 = -924 \\ III_1 \quad 43^2 - 37 \cdot 5^2 = 924 \quad III_2 \quad 73^2 - 37 \cdot 13^2 = -924.$$

Et l'on aura

$$(-) (4, 11) (3, 7) = I_1, \quad (+) (4, 11) (3, 7) = III_2 \\ (-) (4, 7) (3, 11) = II_1, \quad (+) (4, 7) (3, 11) = III_1 \\ (-) (4, 3) (7, 11) = I_1, \quad (+) (4, 3) (7, 11) = II_2.$$

On aura de même

$$(+) I_1 II_1 \infty 18^2 - 37 \cdot 13^2 = -7^2 \cdot 11^2, \\ (-) I_1 II_1 \infty 1^2 - 37 \cdot 1^2 = -4 \cdot 3^2, \\ (+) I_1 III_1 \infty 22^2 - 37 \cdot 5^2 = -3^2 \cdot 7^2, \\ (-) I_1 III_1 \infty 21^2 - 37 \cdot 5^2 = -4 \cdot 11^2, \\ (+) II_1 III_1 \infty 23^2 - 37 \cdot 3^2 = 4 \cdot 7^2, \\ (-) II_1 III_1 \infty 41^2 - 37 \cdot 4^2 = 3^2 \cdot 11^2.$$

Partons ensuite des équations

$$8^2 - 37 \cdot 1^2 = 27, \quad 26^2 - 37 \cdot 3^2 = 343, \quad 1^2 - 37 \cdot 6^2 = -1331,$$

nous aurons, en multipliant les deux premières,

$$97^2 - 37 \cdot 2^2 = 3^3 \cdot 7^3, \quad 64^2 - 37 \cdot 19^2 = -3^3 \cdot 7^3,$$

multiplions ensuite ces deux équations par celle-ci

$$1^2 - 37 \cdot 6^2 = -1331,$$

nous aurons les quatre solutions primitives de l'équation

$$(2) \quad u^2 - 37v^2 = \pm 231^3$$

déterminées par les égalités

$$\begin{aligned} I_1^3 &\infty 347^2 - 37 \cdot 580^2 = -231^3, & III_1^3 &\infty 541^2 - 37 \cdot 584^2 = -231^3 \\ II_1^3 &\infty 4154^2 - 37 \cdot 265^2 = 231^3, & & 4282^2 - 37 \cdot 403^2 = 231^3. \end{aligned}$$

Les nombres premiers

$$2 \quad 11 \quad 13 \quad 29$$

sont de la hauteur 3 par rapport à la base 257, car on aura

$$13^2 - 257 \cdot 1^2 = -88, \quad 19^2 - 257 \cdot 1^2 = 104, \quad 5^2 - 257 \cdot 1^2 = -232,$$

et 32 est le plus petit paramètre applicable pour 257.

De plus, on trouve

$$20^2 - 257 \cdot 1^2 = 143, \quad 24^2 - 257 \cdot 1^2 = 319, \quad 44^2 - 257 \cdot 3^2 = -377,$$

ce qui détermine les trois solutions primitives de l'équation

$$(3) \quad u^2 - 257v^2 = \pm \omega, \quad \omega = 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 = 34316$$

par les égalités

$$\begin{aligned} 157^2 - 257 \cdot 15^2 &= -\omega, & 199^2 - 257 \cdot 5^2 &= \omega, \\ 357^2 - 257 \cdot 25^2 &= -\omega. \end{aligned}$$

Enfin, nous avons à étudier la base 79; les nombres premiers

3 5 7 13

sont de la hauteur 3, et nous aurons

$$8^2 - 79 \cdot 1^2 = -15, \quad 10^2 - 79 \cdot 1^2 = 21, \quad 26^2 - 79 \cdot 3^2 = -35$$

$$35^2 - 79 \cdot 4^2 = -39, \quad 12^2 - 79 \cdot 1^2 = 65, \quad 15^2 - 79 \cdot 2^2 = -91,$$

ce qui donnera

$$37^2 - 79 \cdot 4^2 = 105, \quad 11^2 - 79 \cdot 2^2 = -195$$

$$73^2 - 79 \cdot 8^2 = 273, \quad 16^2 - 79 \cdot 3^2 = -355,$$

de sorte que les trois solutions primitives de l'équation

$$(4) \quad u^2 - 79v^2 = 1365$$

se déterminent par les égalités

$$38^2 - 79 \cdot 1^2 = 1365, \quad 41^2 - 79 \cdot 2^2 = 1365, \quad 199^2 - 79 \cdot 22^2 = 1365.$$

CHAPITRE VI

Sur les sommes de deux carrés.

XXIII. Suppléments aux règles de Dirichlet.

Les seules bases dont l'espèce n'est pas évidente sont les nombres qui se présentent sous forme d'une somme de deux carrés, premiers entre eux, savoir

$$(1) \quad a = \alpha^2 + \beta^2,$$

où a est un nombre composé, car les nombres premiers de cette forme sont toujours des bases de première espèce.

Quant aux nombres composés, étudions tout d'abord les deux hypothèses

$$(2) \quad a = pq$$

$$(3) \quad a = 2pq,$$

où p et q sont des nombres premiers impairs et inégaux, de sorte que p et q sont nécessairement tous deux de la forme $4k + 1$.

Il est évident que l'équation de LEGENDRE

$$(4) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm 1$$

n'est jamais résoluble, à moins que p et q ne soient résidus quadratiques l'un de l'autre.

De même, le nombre (3) ne peut être une base de seconde espèce, à moins qu'une des trois équations de LEGENDRE

$$(5) \quad 2\sigma^2 - pq\tau^2 = \pm 1, \quad p\sigma^2 - 2q\tau^2 = \pm 1, \quad q\sigma^2 - 2p\tau^2 = \pm 1$$

ne soit résoluble, ce qui exige respectivement

$$(6) \quad \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{q}\right) = 1.$$

Cela posé, nous avons démontré les règles de LEJEUNE DIRICHLET en ce qui concerne les nombres pq et $2pq$ où p et q sont des nombres premiers de la forme $4k+1$, savoir:

1° $a = 2pq$ est une base de première espèce, pourvu que

$$(7) \quad \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1;$$

2° $a = pq$ est une base de première espèce, pourvu que

$$(8) \quad \left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1.$$

Or, ces règles étant souvent insuffisantes pour la détermination de l'espèce du nombre (1), il faut les suppléer à l'aide de la théorie des équations de LAGRANGE et de LEGENDRE.

Et l'on trouve immédiatement que le nombre (1) est une base de première espèce dans les cas suivants:

3° l'équation

$$(9) \quad u^2 - av^2 = -4$$

est résoluble (règle de CAYLEY);

4° les deux équations

$$(10) \quad u^2 - av^2 = p^n, \quad u^2 - av^2 = -p^n$$

où p est un nombre premier quelconque, sont simultanément résolubles;

5° les deux équations

$$(11) \quad u^2 - av^2 = 4p^n, \quad u^2 - av^2 = -4p^n,$$

où p est un nombre premier impair, sont simultanément résolubles.

Pour obtenir d'autres règles de ce genre, désignons par p un nombre premier impair, mais quelconque du reste, puis supposons simultanément résolubles les deux équations

$$(12) \quad u^2 - av^2 = (-1)^\delta p^m, \quad u^2 - av^2 = (-1)^\varepsilon p^n,$$

je dis que cette autre équation

$$(13) \quad u^2 - av^2 = (-1)^\varphi p^f,$$

où f désigne le plus grand commun diviseur de m et n , est résoluble aussi.

En effet, supposons $m \geq n$, l'équation (13) est certainement résoluble, pourvu que m soit multiple de n . Soit donc

$$m = nq + r, \quad 0 < r < n,$$

il résulte, en vertu de (12) que cette autre équation

$$u^2 - av^2 = (-1)^{\delta+q\varepsilon} p^r$$

est résoluble aussi, et ainsi de suite.

Cela posé, on voit immédiatement que a est une base de première espèce, dans les cas suivants:

6° $\varphi = 0$, tandis qu'au moins un des exposants δ et ε est impair;

7° $\varphi = 1$, tandis qu'au moins un des exposants δ et ε est impair.

A ces règles nous ajoutons la suivante, bien connue:

8° les nombres

$$(14) \quad \alpha^2 + 1, \quad (2\alpha + 1)^2 + 4$$

sont toujours des bases de première espèce.

Quant aux équations de LEGENDRE

$$(15) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = (-1)^{\theta} \omega, \quad a = pq,$$

la base a est de première espèce dans les cas suivants:

9° les équations

$$(16) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = r^n, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = -r^n,$$

où r est un nombre premier quelconque, sont simultanément résolubles;

10° les équations

$$(17) \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = 4r^n, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = -4r^n,$$

où r désigne un nombre premier impair, sont simultanément résolubles.

Étudions maintenant des cas, où la base a est de seconde espèce, ce qui a lieu dans les cas suivants:

$$11^{\circ} \quad a = \alpha^2 \pm 2;$$

$$12^{\circ} \quad a = (2\alpha + 1)^2 - 4, \quad \alpha \geq 2;$$

$$13^{\circ} \quad a = \beta^2(\alpha^2\beta^2 + 1), \quad \beta = r^2 + s^2,$$

où r et s sont premiers entre eux;

14° les équations de LAGRANGE et de LEGENDRE

$$(18) \quad u^2 - av^2 = \pm r^n, \quad p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm r^n; \quad a = pq,$$

où r est un nombre premier quelconque, sont simultanément résolubles;

15° une des équations

$$(19) \quad \begin{cases} p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm 1, & p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm 2, & p\sigma^2 - q\tau^2 = \pm 4; \\ & a = pq, \end{cases}$$

est résoluble.

Quant à la dernière de ces équations, supposons résoluble celle-ci

$$(20) \quad u^2 - av^2 = -4$$

de sorte que a est une base de première espèce, puis désignons par (s_n, t_n) et (σ_n, τ_n) les éléments généraux des deux suites coordonnées, appartenant à (20), nous aurons

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \sigma_n^2 + (-1)^n 2, & \sigma_{2n-1} &= s_n^2 - (-1)^n 2 \\ s_{2n}^2 - a t_{2n}^2 &= \sigma_{2n-1}^2 - a \tau_{2n-1}^2 = 4 \\ s_{2n-1}^2 - a t_{2n-1}^2 &= \sigma_{2n}^2 - a \tau_{2n}^2 = -4; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la base a de l'équation (20) ne peut jamais admettre des équations primitives.

La règle 15^o est bien connue.

XXIV. Sur les nombres $(10a \pm b)^2 + (10b \mp a)^2$.

Comme application des règles générales que nous venons de développer, dans l'article précédent, j'ai examiné les 23 nombres de la forme

$$101(a^2 + b^2) = (10a \pm b)^2 + (10b \mp a)^2$$

qui sont inférieurs à 10000, et j'ai trouvé que dix-sept de ces nombres sont des bases de première espèce, savoir

101 202 1010 1313 2626 2929 3434 4141 5050
5353 5858 6161 6565 7373 7474 8282 8989,

tandis que six seulement sont de seconde espèce, savoir

505 1717 2525 3737 8585 9797.

Remarquons tout d'abord qu'il existe sept résidus quadratiques de 101 parmi les nombres premiers $4k + 1$, inférieurs à 100, savoir

5 13 17 37 97,

il est évident que

202 2929 4141 5353 6161 7373 8989

sont des bases de première espèce.

De plus, les valeurs suivantes du symbole de LEGENDRE

$$\left(\frac{2}{101}\right) = -1, \quad \left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{13}\right) = \left(\frac{2}{29}\right) = \left(\frac{2}{37}\right) = -1$$

montrent immédiatement que les nombres

$$1010 \quad 2626 \quad 5858 \quad 7474$$

sont des bases de première espèce.

Enfin, on aura

$$101 = 10^2 + 1, \quad 6565 = 81^2 + 4, \quad 8282 = 91^2 + 1,$$

nombres qui sont certainement des bases de première espèce.

Restent encore les trois bases

$$1313 \quad 3434 \quad 5050,$$

et nous aurons pour

$$1313: \quad 36^2 - 1313 \cdot 1^2 = -17, \quad 32^2 - 1313 \cdot 1^2 = -17^2$$

$$3434: \quad 59^2 - 3434 \cdot 1^2 = 47, \quad 35^2 - 3434 \cdot 1^2 = -47^2;$$

c'est-à-dire que ces deux nombres sont des bases de première espèce.

Quant à la dernière des bases susdites, savoir

$$5050 = 202 \cdot 5^2,$$

ou aura, pour la base 202,

$$A_1 = 3131, \quad B_1 = 221, \quad B_3 = 3A_1^2 B_1 + 202 B_1^3 = 5\beta_3,$$

ce qui donnera

$$A_3^2 - 5050 \beta_3^2 = -1,$$

donc 5050 est une base de première espèce.

Étudions maintenant les six bases de seconde espèce, nous aurons tout d'abord

$$2525 = 5^2(10^2 + 1), \quad 9797 = 99^2 - 4,$$

de sorte que ces deux bases sont certainement de seconde espèce.

De plus, on aura, pour les quatres nombres qui restent encore :

$$505: 5 \cdot 9^2 - 101 \cdot 2^2 = 1 \quad 1717: 17 \cdot 39^2 - 101 \cdot 16^2 = 1$$

$$3737: 37 \cdot 38^2 - 101 \cdot 23^2 = -1$$

$$8585: 85 \cdot 1^2 - 101 \cdot 1^2 = -2^4, \quad 67^2 - 8585 \cdot 1^2 = -2^{12},$$

et l'opération itérative du cinquième ordre conduira de la première de ces équations à cette autre

$$85\sigma^2 - 101\tau^2 = -2^{12},$$

donc 8585 est une base de seconde espèce.

TABLES NUMÉRIQUES

Table Première. La base 41 (32,5).

$$u^2 - 41v^2 = \pm \omega.$$

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
—5	6	1	8	7	1	—16	5	1
23	8	1	—25	4	1	31	20	3
32	3	1	—37	2	1	—40 ₁	1	1
40 ₂	9	1	—43	11	2	59	10	1
61	15	2	—64	31	5	73	27	4
80 ₁	11	1	—80 ₂	17	3	—83	9	2
103	12	1	—107	37	6	—113	16	3
—115 ₁	7	2	115 ₂	22	3	125	17	2
—127	23	4	128	13	1	131	34	5
—139	5	2	—155 ₁	3	2	155 ₂	14	1
160 ₁	23	3	—160 ₂	43	7	—163	1	2
—173	14	3	184 ₁	15	1	—184 ₂	29	5
185 ₁	29	4	185 ₂	53	8	197	19	2
—200 ₁	13	3	200 ₂	47	7	215 ₁	16	1
—215 ₂	21	4	—223	49	8	—241	28	5
248 ₁	17	1	—248 ₂	11	3	—251	35	6
256	25	3	—269	10	3	271	36	5
277	21	2	283	18	1	—295 ₁	19	4
295 ₂	48	7	—296 ₁	27	5	—296 ₂	55	9
305 ₁	31	4	—305 ₂	8	3	307	26	3
320 ₁	19	1	—320 ₂	7	3	—337	68	11

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
344 ₁	5	3	344 ₂	37	5	—349	26	5
—353	4	3	359	20	1	—365 ₁	2	3
365 ₂	23	2	—367	17	4	—368 ₁	1	3
368 ₂	73	11	373	43	6	—379	61	10
389	67	10	400 ₁	21	1	400 ₂	61	9
401	55	8	—409	40	7	415 ₁	28	3
—415 ₂	47	8	419	38	5	—431	15	4
433	31	4	443	22	1	—449	24	5
461	25	2	467	86	13	472 ₁	29	3
—472 ₂	67	11	—487	13	4	488 ₁	23	1
—488 ₂	39	7	491	50	7	—496 ₁	23	5
496 ₂	39	5	—512	53	9	—515 ₁	31	6
515 ₂	74	11	523	62	9	—529	80	13
535 ₁	24	1	—535 ₂	11	4	—541	22	5
565 ₁	27	2	—565 ₂	38	7	569	35	4
—575 ₁	9	4	—575 ₂	73	12	584 ₁	25	1
—584 ₂	21	5	592 ₁	31	3	592 ₂	51	7
—599	45	8	—607	7	4	613	93	14
—617	52	9	—619	59	10	625	57	8
—631	5	4	635 ₁	26	1	—635 ₂	29	6
—640 ₁	37	7	640 ₂	87	13	—647	3	4
655 ₁	1	4	655 ₂	32	3	661	69	10
—664 ₁	19	5	664 ₂	75	11	677	29	2
688 ₁	27	1	—688 ₂	79	13	695 ₁	52	7
—695 ₂	99	16	—701	18	5	713 ₁	37	4
—713 ₂	36	7	733	47	6	—736 ₁	17	5
—736 ₂	65	11	739	42	5	743	28	1
—761	92	15	—769	16	5	—775 ₁	43	8
775 ₂	64	9	787	34	3	797	31	2
800 ₁	29	1	800 ₂	53	7	—811	85	14
815 ₁	76	11	815 ₂	88	13	—821	50	9

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
824 ₁	43	5	— 824 ₂	105	17	— 829	14	5
— 851 ₁	25	6	— 851 ₂	57	10	— 853	34	7
856 ₁	35	3	— 856 ₂	13	5	857	59	8
859	30	1	— 863	71	12	865 ₁	39	4
— 865 ₂	64	11	877	119	18	— 881	12	5
— 904 ₁	11	5	904 ₂	65	9	907	54	7
911	44	5	— 920 ₁	33	7	— 920 ₂	49	9
920 ₃	31	1	920 ₄	113	17	925 ₁	33	2
925 ₂	49	6	941	71	10	— 944 ₁	9	5
— 944 ₂	91	15	— 947	23	6	953	107	16
— 961	8	5	— 976 ₁	7	5	— 976 ₂	101	15
983	32	1	— 985 ₁	32	7	985 ₂	83	12
989 ₁	6	5	989 ₂	95	14	— 992 ₁	63	11
992 ₂	89	13	1000 ₁	37	3	— 1000 ₂	77	13

Table II. La base 30 (11,2).

$$u^2 - 30v^2 = (-1)^d \omega.$$

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
19	7	1	— 29	1	1	49	13	2
— 71	7	2	91 ₁	19	3	91 ₂	11	1
— 101	13	3	— 119 ₁	1	2	— 119 ₂	19	4
139	13	1	— 149	11	3	169	17	2
— 191	17	4	211	31	5	— 221 ₁	7	3
— 221 ₂	23	5	— 239	29	6	241	19	2
259 ₁	17	1	259 ₂	23	3	— 269	1	3
289	37	6	— 311	13	4	331	19	1
— 359	11	4	361	29	4	379	43	7
— 389	19	5	409	23	2	— 431	7	4
— 461	17	5	— 479	1	4	481 ₁	31	4

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
481 ₂	49	8	499	23	1	—509	31	7
—551 ₁	23	6	—551 ₂	37	8	571	29	3
—581 ₁	13	5	—581 ₂	43	9	—599	49	10
601	41	6	619	37	5	—629 ₁	11	5
—629 ₂	29	7	691	31	3	—701	7	5
—719	19	6	721 ₁	29	2	721 ₂	61	10
739	47	7	—749 ₁	1	5	—749 ₂	41	9
769	43	6	—791 ₁	17	6	—791 ₂	47	10
811	29	1	—821	53	11	—839	59	12
841	31	2	859	67	11	889 ₁	37	4
889 ₂	53	8	—911	13	6	931 ₁	31	1
931 ₂	41	5	—941	23	7	—959 ₁	11	6
—959 ₂	31	8						

Les équations principales $5\alpha^2 - 6\beta^2 = (-1)^d \omega$.

$\pm \omega$	α	β	$\pm \omega$	α	β	$\pm \omega$	α	β
—1	1	1	—19	1	2	29	5	4
—49	1	3	71	5	3	—91 ₁	1	4
—91 ₂	5	6	101	5	2	119 ₁	11	9
119 ₂	5	1	—139	7	8	149	7	4
—169	5	7	191	7	3	—211	1	6
221 ₁	11	8	221 ₂	7	2	239	7	1
—241	7	9	—259 ₁	11	12	—259 ₂	5	8
269	17	14	—289	1	7	311	11	7
—331	13	14	359	13	9	—361	5	9
—379	1	8	389	11	6	—409	11	13
431	17	13	461	13	8	479	23	19
—481 ₁	7	11	—481 ₂	1	9	—499	17	18
509	11	4	551 ₁	13	7	551 ₂	11	3
—571	11	14	581 ₁	17	12	581 ₂	11	2
599	11	1	—601	5	11	—619	7	12

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
629 ₁	19	14	629 ₂	13	6	—691	13	16
701	23	18	719	17	11	—721 ₁	17	19
—721 ₂	1	11	—739	5	12	749 ₁	29	24
749 ₂	13	4	—769	7	13	791 ₁	19	13
791 ₂	13	3	—811	23	24	821	13	2
839	13	1	—841	19	21	—859	1	12
—889 ₁	13	17	—889 ₂	5	13	911	23	17
—931 ₁	25	26	—931 ₂	11	16	941	19	12
959 ₁	25	19	959 ₂	17	9			

Les équations simultanées

$$2s^2 - 15t^2 = 3\sigma^2 - 10\tau^2 = (-1)^j \omega.$$

$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ
—7	2	1	1	1	—13	1	1	3	2	17	4	1	3	1
—37	7	3	1	2	83	7	1	9	4	—103	4	3	7	5
107	11	3	7	2	113	8	1	11	5	—127	2	3	11	7
—133 ₁	1	3	13	8	—133 ₂	11	5	17	10	137	16	5	7	1
—157	8	5	1	4	203 ₁	13	3	9	2	203 ₂	17	5	11	4
—223	16	7	3	5	227	11	1	17	8	233	22	7	9	1
—247 ₁	8	5	1	5	—247 ₂	17	9	9	7	257	14	3	13	5
—277	7	5	11	8	323 ₁	13	1	11	2	323 ₂	23	7	21	10
—343	4	5	17	11	347	19	5	13	4	353	28	9	11	1
—367	2	5	21	13	—373	1	5	23	14	377 ₁	14	1	17	7
377 ₂	16	3	23	11	—397	13	7	9	8	443	17	3	19	8
—463	26	11	3	7	467	29	9	13	2	—487	32	13	1	7
—493 ₁	11	7	7	8	—493 ₂	19	9	13	10	497 ₁	16	1	13	1
497 ₂	44	15	27	13	563	17	1	29	14	587	19	3	23	10
593	22	5	19	7	—607	8	7	19	13	—613	31	13	3	8
617	26	7	17	5	—637 ₁	17	9	11	10	—637 ₂	43	17	1	8
683	23	5	21	8	—703 ₁	4	7	27	17	—703 ₂	16	9	13	11

$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ
707 ₁	19	1	33	16	707 ₂	31	9	17	4	-727	2	7	31	19
-757	23	11	9	10	-823	14	9	17	13	827	41	13	17	2
833 ₁	22	3	29	13	833 ₂	32	9	19	5	-853	29	13	7	10
857	46	15	17	1	-877	13	9	19	13	923 ₁	37	11	19	4
923 ₂	23	3	31	14	947	29	7	23	8	953	22	1	39	19
-967	28	13	9	11	-973 ₁	11	9	3	10	-973 ₂	41	17	23	16
977	26	5	27	11	-997	47	19	1	10					

Table III. La base 51 (50,7).

$$u^2 - 51v^2 = (-1)^d \omega.$$

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
-2	7	1	13	8	1	25	22	3
-26	5	1	-35 ₁	4	1	-35 ₂	13	2
-47	2	1	49	10	1	-50	1	1
-59	20	3	70 ₁	11	1	70 ₂	23	3
-83	11	2	94	37	5	-98	19	3
118	13	1	145 ₁	14	1	145 ₂	31	4
-155 ₁	7	2	-155 ₂	41	6	157	19	2
166	25	3	169	38	5	-179	5	2
-191	25	4	-203 ₁	1	2	-203 ₂	16	3
205 ₁	16	1	205 ₂	52	7	217 ₁	26	3
217 ₂	59	8	229	73	10	-239	55	8
-251	32	5	-263	14	3	-287 ₁	23	4
-287 ₂	62	9	-290 ₁	13	3	-290 ₂	47	7
310 ₁	19	1	310 ₂	53	7	-314	31	5
325 ₁	23	2	325 ₂	28	3	-338	11	3
349	20	1	358	67	9	-359	10	3
373	47	6	382	29	3	-383	46	7

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
— 395 ₁	8	3	— 395 ₂	76	11	406 ₁	41	5
406 ₂	95	13	409	35	4	— 410 ₁	7	3
— 410 ₂	61	9	421	25	2	433	22	1
— 434 ₁	5	3	— 434 ₂	29	5	— 443	4	3
— 455 ₁	2	3	— 455 ₂	19	4	— 455 ₃	83	12
— 455 ₄	134	19	457	61	8	— 458	1	3
— 467	37	6	478	13	1	— 491	28	5
502	31	3	526	55	7	553 ₁	37	4
553 ₂	82	11	— 563	44	7	565 ₁	32	3
565 ₂	49	6	574 ₁	25	1	574 ₂	43	5
577	89	12	— 587	97	14	— 599	26	5
— 611 ₁	35	6	— 611 ₂	67	10	613	103	14
625	26	1	637 ₁	29	2	637 ₂	124	17
— 647	13	4	— 650 ₁	43	7	— 650 ₂	59	9
— 659	104	15	661	44	5	— 695 ₁	11	4
— 695 ₂	74	11	— 698	89	13	718	83	11
733	28	1	— 746	23	5	757	31	2
766	35	3	— 767	7	4	769	70	9
790 ₁	29	1	790 ₂	97	13	— 791 ₁	5	4
— 791 ₂	22	5	— 815 ₁	1	4	— 815 ₂	118	17
— 818	41	7	829	77	10	841	46	5
— 842	73	11	— 863	49	8	865 ₁	58	7
865 ₂	41	4	— 866	103	15	— 875 ₁	31	6
— 875 ₂	88	13	886	125	17	— 899 ₁	40	7
— 899 ₂	125	18	910 ₁	37	3	910 ₂	31	1
— 914	19	5	934	47	5	937	91	12
961	65	8	— 971	95	14	973 ₁	32	1
973 ₂	53	6	982	59	7	985 ₁	38	3
985 ₂	98	13	— 995 ₁	29	6	— 995 ₂	56	9

Les équations simultanées

$$3s^2 - 17t^2 = \pm \omega, \quad 3\sigma^2 - 17\tau^2 = \mp 2\omega.$$

$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ	$\pm \omega$	s	t	σ	τ
—5	2	1	3	1	7	5	2	1	1	—29	9	4	5	1
31	4	1	11	5	—41	3	2	13	5	—65 ₁	1	2	27	11
—65 ₂	16	7	7	1	79	7	2	15	7	91 ₁	6	1	25	11
91 ₂	11	4	9	5	—113	23	10	9	1	—125	7	4	19	7
139	18	7	7	5	163	14	5	13	7	—173	30	13	11	1
175 ₁	8	1	39	17	175 ₂	9	2	29	13	—197	5	4	33	13
199	32	13	3	5	211	39	16	1	5	—233	8	5	29	11
235 ₁	13	4	23	11	235 ₂	21	8	11	7	—245 ₁	3	4	47	19
—245 ₂	37	16	13	1	—269	1	4	61	25	283	10	1	53	23
295 ₁	11	2	43	19	295 ₂	28	11	9	7	—317	6	5	43	17
—329 ₁	24	11	19	5	—329 ₂	44	19	15	1	343	16	5	27	13
367	20	7	21	11	—377 ₁	4	5	57	23	—377 ₂	21	10	23	7
379	42	17	5	7	—401	12	7	35	13	403	15	4	37	17
—413 ₁	2	5	71	29	—413 ₂	15	8	31	11	415 ₁	12	1	67	29
415 ₂	56	23	1	7	439	13	2	57	25	—449	31	14	21	5
487	27	10	19	11	499	23	8	25	13	—521	28	13	25	7
—533 ₁	10	7	49	19	—533 ₂	58	25	19	1	547	18	5	41	19
571	14	1	81	35	—581 ₁	13	8	45	17	—581 ₂	38	17	23	5
607	15	2	71	31	—617	19	10	37	13	619	22	7	35	17
—641	8	7	63	25	643	30	11	23	13	—653	65	28	21	1
—677	35	16	27	7	691	41	16	15	11	—725 ₁	6	7	77	31
—725 ₂	11	8	59	23	751	16	1	95	41	775 ₁	37	14	21	13
775 ₂	48	19	13	11	—785 ₁	4	7	91	37	—785 ₂	72	31	23	1
787	25	8	39	19	—809	29	14	35	11	811	19	4	65	29
—821	2	7	105	43	823	29	10	33	17	—845 ₁	9	8	73	29
—845 ₂	42	19	29	7	—857	20	11	47	17	—881	52	23	27	5
895	24	7	49	23	895 ₂	44	17	19	13	907	62	25	9	11
—921	79	34	25	1	—941	7	8	87	35	955 ₁	18	1	109	47
955 ₂	69	28	7	11	991	76	31	5	11					

Table IV. La base 130 (57,5).

$$u^2 - 130v^2 = \pm \omega.$$

$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v	$\pm \omega$	u	v
— 9	11	1	— 49	9	1	— 79	21	2
— 81	7	1	— 121	3	1	— 129 ₁	1	1
— 129 ₂	47	4	159 ₁	17	1	— 159 ₂	19	2
— 191	67	6	199	37	3	209 ₁	27	2
— 209 ₂	31	3	— 231 ₁	17	2	231 ₂	59	5
— 231 ₃	43	4	231 ₄	19	1	311	21	1
— 321 ₁	19	2	321 ₂	49	4	361	71	6
— 329 ₁	29	3	329 ₂	93	8	399 ₁	23	1
— 399 ₂	11	2	— 399 ₃	41	4	— 399 ₄	89	8
— 439	9	2	441	31	2	— 441 ₂	53	5
— 471 ₁	7	2	471 ₂	61	5	— 511 ₁	3	2
511 ₂	41	3	— 519 ₁	1	2	519 ₂	83	7
521	51	4	569	33	2	599	27	1
— 601	123	11	— 641	23	8	— 649 ₁	51	5
649 ₂	73	6	679 ₁	43	3	— 679 ₂	111	10
711 ₁	29	1	— 711 ₂	33	4	719	63	5
729	53	4	— 751	87	8	— 809	19	3
831 ₁	31	1	831 ₂	151	13	— 849 ₁	49	5
849 ₂	37	2	— 881	17	3	911	129	11
919	107	9	959 ₁	33	1	— 959 ₂	61	6
— 991	33	4						

$$2\sigma^2 - 65\tau^2 = \pm \omega.$$

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
7	6	1	— 33 ₁	4	1	33 ₂	7	1
— 47	3	1	— 57 ₁	2	1	— 57 ₂	28	5
— 63 ₁	1	1	63 ₂	8	1	— 73	16	3
97	9	1	137	19	3	— 167	27	5
177 ₁	11	1	177 ₂	41	7	— 193	14	3

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
223	12	1	297 ₁	31	5	— 297 ₂	38	7
327 ₁	14	1	327 ₂	64	11	— 343	11	3
— 353	53	9	383	22	3	423 ₁	32	5
— 423 ₂	61	11	447 ₁	16	1	— 447 ₂	37	7
— 457	8	3	— 463	49	9	473 ₁	23	3
— 473 ₂	24	5	— 487	7	3	513 ₁	17	1
513 ₂	43	7	— 553 ₁	4	3	553 ₂	33	5
— 567 ₁	23	5	567 ₂	76	13	— 577	2	3
— 583 ₁	1	3	— 583 ₂	18	1	— 593	36	7
— 617	72	13	657 ₁	19	1	— 657 ₂	22	5
687 ₁	34	5	687 ₂	44	7	— 743	21	5
— 847 ₁	47	9	— 847 ₂	83	15	863	88	15
873 ₁	34	7	873 ₂	77	13	— 903 ₁	19	5
— 903 ₂	59	11	— 903 ₃	71	13	903 ₄	22	1
967	36	5	977	18	5	983	28	3
993 ₁	23	1	— 993 ₂	106	19			

$$5\sigma^2 - 26\tau^2 = \pm \omega.$$

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
11	7	3	19	3	1	— 21 ₁	1	1
21 ₂	5	2	— 59	3	2	— 99 ₁	1	2
99 ₂	5	1	— 109	5	3	141 ₁	7	2
141 ₂	19	8	— 149	15	7	— 171 ₁	7	4
171 ₂	17	7	189 ₁	11	4	— 189 ₂	23	13
219 ₁	7	1	— 219 ₂	17	8	— 229	1	3
— 291 ₁	5	4	— 291 ₂	31	14	301 ₁	9	2
— 301 ₂	19	9	— 331	11	6	349	33	14
— 371 ₁	3	4	371 ₂	11	3	379	9	1
— 411 ₁	1	4	411 ₂	31	13	— 421	47	21
461	29	12	499	27	11	501 ₁	11	2

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
— 501 ₂	23	11	509	17	6	531 ₁	19	7
— 531 ₂	35	16	— 539 ₁	17	8	539 ₂	23	9
541	21	8	579 ₁	11	1	— 579 ₂	49	22
— 619	23	12	— 661	17	9	— 669 ₁	11	7
— 669 ₂	13	17	— 691	7	6	709	15	4
739	45	19	— 749 ₁	27	13	— 749 ₂	51	23
— 811	5	6	821	43	18	— 869 ₁	9	7
869 ₂	19	6	— 931 ₁	1	6	— 931 ₂	53	24
981 ₁	23	8	— 981 ₂	41	19			

$$10\sigma^2 - 13\tau^2 = \pm \omega.$$

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
— 3	1	1	27	2	1	43	4	3
— 53	10	9	77 ₁	3	1	— 77 ₂	2	3
— 107	1	3	133 ₁	5	3	— 133 ₂	12	11
147 ₁	4	1	147 ₂	22	19	157	11	9
173	9	7	237 ₁	5	1	— 237 ₂	14	13
243	20	17	— 277	6	7	283	38	33
347	6	1	363 ₁	10	7	— 363 ₂	16	13
373	7	3	— 387 ₁	5	7	387 ₂	14	11
— 413 ₁	8	9	413 ₂	27	23	— 443	23	21
— 467	37	33	477 ₁	7	1	— 477 ₂	4	7
— 517 ₁	18	17	517 ₂	25	21	523	8	3
— 547	3	7	— 563	7	9	— 573 ₁	10	11
573 ₂	11	7	— 597 ₁	2	7	597 ₂	23	19
627 ₁	8	1	— 627 ₂	25	23	— 627 ₃	1	7
— 627 ₄	34	29	653	21	17	677	15	11
— 693 ₁	20	19	— 693 ₂	23	29	693 ₃	17	13
693 ₄	43	37	— 757	12	13	— 763 ₁	9	11
763 ₂	32	27	797	9	1	803 ₁	12	7

$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ	$\pm \omega$	σ	τ
— 803 ₂	5	9	883	10	3	— 893 ₁	4	9
— 893 ₂	22	21	907	14	9	— 933 ₁	8	11
— 933 ₂	34	31	963 ₁	28	23	963 ₂	50	43
987 ₁	10	1	987 ₂	16	11	— 987 ₃	11	13
— 987 ₄	41	37	— 997	48	43			

TABLE DES MATIÈRES

Avant-Propos.....	Pages 3
-------------------	------------

CHAPITRE PREMIER

Applications de l'opération générale.

I. Congruences fondamentales.....	8
II. Le paramètre est un nombre impair.....	11
III. Le paramètre est un nombre pair.....	15
IV. Sur le facteur $k = 2^n$	17
V. Sur les bases $2^{2n} + 1$	19

CHAPITRE II

Sur les nombres A_n et u_n .

VI. Résidus par rapport à la base.....	23
VII. Sur les bases de seconde espèce.....	26
VIII. Résolution d'une équation indéterminée.....	30

CHAPITRE III

Équations de Legendre.

IX. Propriété fondamentale des solutions.....	33
X. Suites fermées et suites coordonnées.....	35
XI. Sur la multiplication des équations de Legendre.....	38
XII. Conditions de résolubilités.....	43
XIII. Applications de l'opération itérative.....	45
XIV. Sur la décomposition principale.....	48

CHAPITRE IV

Sur les hauteurs paires.

XV. Équations primitives.....	53
XVI. Bases de première espèce.....	59
XVII. Bases de seconde espèce.....	63
XVIII. Sur les bases $4p^4 + 1$	65
XIX. Applications diverses.....	66

CHAPITRE V

Sur l'opération du troisième ordre.

	Pages
XX. Sur la multiplication des équations	69
XXI. Sur la hauteur 3	72
XXII. Exemples	75

CHAPITRE VI

Sur les sommes de deux carrés.

XXIII. Suppléments aux règles de Dirichlet	78
XXIV. Sur les nombres $(10a \pm b)^2 + (10b \mp a)^2$	82

TABLES NUMÉRIQUES

Table Première. La base 41	85
Table II. La base 30	87
Table III. La base 51	90
Table IV. La base 130	93



MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

3. BIND (KR. 13,75):

	Kr. Ø.
1. THORKESSON, THORKELL: Undersøgelse af nogle varme Kilder paa Nordisland. 1920	1.00
2. PÁL, JULIUS: Über ein elementares Variationsproblem. 1920..	1.15
3. WEBER, SOPHUS: Et Metals Fordampningshastighed i en Luftart. 1920	0.50
4. WEBER, SOPHUS: Note om Kvægsølvets kritiske Konstanter. 1920	0.40
5. JUEL, C.: Note über die paaren Zweigen einer ebenen Elementarkurve vierter Ordnung. 1920.....	0.50
6. JUEL, C.: Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten. 1920	0.50
7 RØRDAM, H. N. K.: Benzoe- og Toluylsyrernes absolute Affinitet overfor een og samme Base. 1920	1.00
8. MOLLERUP, JOHANNES: Une méthode de sommabilité par des moyennes éloignées. 1920	1.00
9. BRØNSTED, J. N.: On the Applicability of the Gas Laws to strong Electrolytes, II. 1920	0.75
10. NIELSEN, NIELS: Note sur une classe de séries trigonométriques. 1921	0.50
11. HANSEN, H. M. und JACOBSEN, J. C.: Ueber die magnetische Zerlegung der Feinstrukturkomponenten der Linien des Heliumfunkspektrums. Mit 1 Tafel. 1921	1.40
12. HEVESY, G.: Über die Unterscheidung zwischen elektrolytischer und metallischer Stromleitung in festen und geschmolzenen Verbindungen. 1921	0.75
13. HEVESY, G.: Über den Zusammenhang zwischen Siedepunkt und Leitfähigkeit elektrolytisch leitender Flüssigkeiten. 1921	0.60
14. FOGH, I.: Über die Entdeckung des Aluminiums durch Oersted im Jahre 1825. 1921	0.60
15. FOGH, I.: Zur Kenntnis des Aluminiumamalgams. Mit 1 Tafel. 1921	0.75
16. NIELSEN, NIELS: Sur la généralisation du problème de Fermat. 1921	0.80
17. LARSEN, VALDEMAR: Bertrands Problem. 1921	1.25
18. WEBER, SOPHUS: En Luftstrøms Indflydelse paa et Legemes Fordampningshastighed. 1921	0.60
19. WEBER, SOPHUS: Psychrometrets Teori. 1921	0.50
20. FAURHOLT, CARL: Über die Prozesse » $\text{NH}_2\text{COONH}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons (\text{NH}_4)_2\text{CO}_3$ « und » $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_2\text{CO}_3$ «. 1921	3.75

4. BIND (KR. 13,20):

Kr. Ø.

- | | |
|---|------|
| 1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur l'Équation de Fermat. 1922 | 5.75 |
| 2. JACOBSEN, C. & OLSEN, JOHS.: On the Stopping Power of Lithium for α -Rays. 1922..... | 0.60 |
| 3. NØRLUND, N. E.: Nogle Bemærkninger angaaende Interpolation med æquidistante Argumenter. 1922 | 1.10 |
| 4. BRØNSTED, J. N.: The Principle of the Specific Interaction of Ions. 1921 | 1.15 |
| 5. PEDERSEN, P. O.: En Metode til Bestemmelse af den effektive Modstand i højfrekvente Svingningskredse. 1922..... | 0.70 |
| 6. PRYTZ, K.: Millimètre étallonné par des interférences. 1922 .. | 0.75 |
| 7. PEDERSEN, P. O.: On the Lichtenberg Figures. Part II. 1. The distribution of the velocity in positive and negative figures. 2. The use of Lichtenberg figures for the measurement of very short intervals of time. With two plates. 1922 | 2.15 |
| 8. BØGGILD, O. B.: Re-Examination of some Zeolites (Okenite, Ptilolite, etc.). 1922 | 1.40 |
| 9. WIEDEMANN, E. und FRANK, J.: Über die Konstruktion der Schattenlinien auf horizontalen Sonnenuhren von Tâbit ben Qurra. 1922 | 0.75 |
| 10. PEDERSEN, P. O.: Om elektriske Gnister. I. Gnistforsinkelse. Med 2 Tavler. 1922 | 3.25 |

5. BIND (KR. 13,10):

Kr. Ø.

- | | |
|--|------|
| 1. NIELSEN, NIELS: Recherches sur les Équations de Lagrange. 1923 | 3.20 |
| 2. KAMPÉ DE FÉRIET, J.: Sur une formule d'addition des Polynomes d'Hermite. 1923 | 0.50 |
| 3. HANSEN, H. M., TAKAMINE, T., and WERNER, SVEN: On the Effect of Magnetic and Electric Fields on the Mercury Spectrum. With two plates and figures in the text. 1923 | 2.25 |
| 4. NIELSEN, NIELS: Recherches sur certaines Équations de Lagrange de formes spéciales. 1923..... | 3.00 |
| 5. NIELSEN, NIELS: Sur le genre de certaines Équations de Lagrange. 1923..... | 2.25 |
| 6. KLOOSTERMAN, H. D.: Ein Satz über Potenzreihen unendlich vieler Variablen mit Anwendung auf Dirichletsche Reihen. 1923..... | 1.00 |
| 7. NIELSEN, NIELS: Notes supplémentaires sur les Équations de Lagrange. 1923..... | 0.75 |
| 8. HANSEN, H. M. and WERNER, S.: The Optical Spectrum of Hafnium. 1923..... | 0.60 |
| 9. GJALDBÆK, J. K.: Über das Potential zwischen der 0.1 n und 3.5 n Kalomelelektrode. 1924..... | 0.60 |
| 10. HARTMANN, JUL.: Undersøgelser over Gnisten ved en Kvægsølvstraalekommutator. 1924..... | 1.25 |
| 11. BJERRUM, NIELS, UNMACK, AUGUSTA und ZECHMEISTER, LÁSZLÓ: Die Dissoziationskonstante von Methylalkohol. 1924..... | 1.10 |
| 12. NIELSEN, JAKOB: Die Gruppe der dreidimensionalen Gittertransformationen. 1924..... | 1.00 |

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VI**, 2.

ON THE EFFECT
OF PERTURBING ELECTRIC FIELDS
ON THE ZEEMAN EFFECT OF THE
HYDROGEN SPECTRUM

BY

H. C. UREY



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1924

§ 1. Introduction.

According to the quantum theory of line spectra, the effect of a magnetic field on the fine structure of the hydrogen spectrum should be to split each fine structure component into an undisplaced component polarized parallel to the magnetic field and two components displaced equal distances on each side of the first and polarized perpendicular to the field so that three complex lines should appear having the same fine structure as the original line¹. H. M. HANSEN and JACOBSEN² have made an investigation of the effect of a magnetic field on the 4686 line of the helium spark spectrum which has an origin analogous to the hydrogen spectrum and find that their experiments show an agreement with the theory for fields up to about 6000 Gauss. For larger fields they find that the distance between the two stronger components of the fine structure becomes less and especially that the shorter wave length component is shifted toward the red. Recently K. FÖRSTERLING and G. HANSEN have published the results³ of similar experiments on the Zeeman effect of the H_α and H_β lines of hydrogen which appear as narrow doublets and have also found that the two members of the doublet seem to move closer together

¹ DEBYE, Phys. Zs. **17**, 507, 1916; SOMMERFELD, Phys. Zs. **17**, 491, 1916; BOHR, Quantum theory of line spectra, Part. II, p. 82, D. Kgl. Danske Videnskabs Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række, IV, 1.

² H. M. HANSEN and J. C. JACOBSEN, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. math.-fys. Meddelelser III, 11.

³ K. FÖRSTERLING and G. HANSEN, Zs. für Phys. **18**, 26, 1923.

as the intensity of the magnetic field is increased. At the highest field intensities used (about 10000 Gauss) the three doublets have merged into three broad lines each with a total width somewhat less than that of the original doublets. Both H. M. HANSEN and JACOBSEN, and FÖRSTERLING and G. HANSEN mention the possibility that these effects may not be due to the direct influence of the magnetic field on the atom and therefore at variance with the theoretical predictions but may be due to the action of small perturbing electric fields in the tube, caused by the change in the discharge due to the magnetic field¹.

In view of the great theoretical interest of this question this possibility will be investigated more closely in the present paper. In the first place we shall consider the possible effect of uniform constant electric fields of different intensities and directions acting on the atoms simultaneously with the magnetic field. To the problem of the origin of these fields and of the possible more complicated effects of the discharge on the spectrum we shall return after the calculations of the mentioned effect.

The effect of an electric field on the fine structure of a hydrogen line has been treated by KRAMERS². His results apply directly also to the case where a magnetic field parallel to the electric field is present, since in this case we obtain a simple superposition of the perturbations due to each field separately. For our purpose it is necessary,

¹ K. FÖRSTERLING and G. HANSEN state that there was no visible change of the discharge when the magnetic field was turned on. Yet, as is evident from their photographs, the intensity of the light emitted in the presence of a magnetic field of 10000 Gauss is less than in the case of no magnetic field. This indicates a change in the character of the excitation even if it is not apparent to the eye.

² KRAMERS, *Zs. für Phys.* **3**, 199, 1920.

however, also to consider the simultaneous effect on the fine structure of an electric and a magnetic field, which make an angle with each other. If, as in our case the electric field is so small that it will only produce comparatively small changes in the fine structure, it will be sufficient to consider an electric field perpendicular to the magnetic field. In fact an electric field can always be resolved in a parallel and a transverse component and in the case under consideration the effects of these components will be simply superposed¹.

§ 2. Calculation of the influence of a transverse electric field on the stationary states of the hydrogen atom under the influence of a magnetic field of such intensity that the relativity and Zeeman effects are of the same order of magnitude.

The Hamiltonian function for this problem disregarding terms proportional to H^2 is ²

$$mc^2 \left[\left\{ 1 + \frac{1}{m^2 c^2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \right\}^{1/2} - 1 \right] - \frac{Ne^2}{r} + \frac{p_\varphi He}{2\pi mc} + Fer \sin \theta \cos \varphi$$

where Ne and $-e$ are nuclear and electronic charge respectively, and m the electronic mass, and r , θ and φ are the polar coordinates of the electron if the origin is taken at the nucleus and p_r , p_θ and p_φ are the conjugated momenta

¹ EPSTEIN (Phys. Rev. **22**, 202, 1923) has announced that the problem of the hydrogen atom under the influence of crossed electric and magnetic fields can be solved by the method of perturbed systems, if the relativity effect is neglected. Recently HALPERN (Zs. für Phys. **18**, 287, (1923) and O. KLEIN (Zs. für Phys. **22**, 109, 1923) have also treated this problem. It is obvious that we cannot use these solutions for our problem since we are primarily interested in the effect of magnetic and electric fields on the fine structure.

² A simple calculation shows that the energy term proportional to H^2 is of the order of magnitude $a^2 e^2 H^2 / 8m c^2$, where a is the semimajor axis of the ellipse, and is therefore quite negligible. (See HALPERN, Zs. für Phys. **18**, 352, 1923).

and H and F are the magnetic and electric field strengths respectively. We shall use the following set of uniformizing variables (angle variables), adapted to the treatment of a perturbed Keplerian motion.

J = twice the absolute value of the energy divided by the frequency of revolution.

$2\pi w$ = mean anomaly multiplied by the frequency of revolution.

$P/2\pi$ = total angular momentum of the electron around the nucleus.

$2\pi\beta$ = angular distance between the line of nodes and the major axis.

$Q/2\pi$ = magnitude of the angular momentum of the electron about the polar axis.

$2\pi\gamma$ = angular distance between the meridian plane $\varphi = 0$ and the lines of nodes.

With these variables the energy function can be written in the form

$$E = E_0 + Fex, \quad (1)$$

where E_0 is a function of J , P and Q only, given by the equation

$$E_0 = -\frac{2\pi^2 N^2 e^4 m}{J^2} \left[1 + \left(\frac{\pi N e^2}{c} \right)^2 \left(-\frac{3}{J^2} + \frac{4}{JP} \right) \right] \pm \frac{QHe}{4\pi mc}$$

and x represents the displacement of the electron in the direction of the electric field as a function of the J , P , Q , w , β and γ and is expressed by the simple formula

$$x = \sum D'_\tau \cos 2\pi(\tau w + \beta + \gamma) - \sum D''_\tau \cos 2\pi(\tau w - \beta + \gamma) \quad (2)$$

where the D'_τ and D''_τ are functions of the J , P and Q only¹.

¹ KRAMERS' Dissertation, Intensities of Spectral Lines pp. 16 and 28, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Afd., 8. Række III, 3.

The motion of the electron in the unperturbed system for which $F = 0$ can be described as a motion in a Keplerian ellipse with frequency ω on which is superimposed a precession of the ellipse in its plane with frequency σ and of the plane about an axis parallel to the direction of the magnetic field with frequency ϱ . The frequencies ω , σ and ϱ are given by the equations

$$\omega = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial E_0}{\partial J}, \quad \sigma = \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial E_0}{\partial P} \quad \text{and} \quad \varrho = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial E_0}{\partial Q} = \pm \frac{He}{4\pi mc},$$

and σ and ϱ are very much smaller than ω . ϱ will be positive or negative depending on whether the angle between the magnetic field and the vector of the angular momentum of the electron about the nucleus is less or greater than a right angle. While in the unperturbed motion, the variables J , P and Q are constant and the variables w , β and γ increase uniformly with the time, this is no longer true, when the system is perturbed by the electric field. In this case the system can now be described by means of the variables J' , P' , Q' , w' , β' and γ' , related to the former variables by the infinitesimal contact transformation¹ defined by the equations

$$J' = J + Fe \frac{\partial S}{\partial w}, \quad P' = P + Fe \frac{\partial S}{\partial \beta}, \quad Q' = Q + Fe \frac{\partial S}{\partial \gamma},$$

$$w' = w - Fe \frac{\partial S}{\partial J}, \quad \beta' = \beta - Fe \frac{\partial S}{\partial P}, \quad \gamma' = \gamma - Fe \frac{\partial S}{\partial Q},$$

where

$$S = \sum \frac{D'_\tau}{2\pi(\tau\omega + \sigma + \varrho)} \sin 2\pi(\tau w + \beta + \gamma) -$$

$$\sum \frac{D'_\tau}{2\pi(\tau\omega - \sigma + \varrho)} \sin 2\pi(\tau w - \beta + \gamma).$$

¹ This was first used in BURGERS' Dissertation, Het Atoommodel van RUTHERFORD-BOHR, Haarlem 1918. For a complete review of the quantum theory of perturbed systems see BOHR, Zs. für Phys. **13**, 117, 1923.

Since σ and ϱ are very small in comparison with ω all terms of this series may be disregarded except those for which τ is zero. If the motion of the perturbed system is expressed in these new variables, the energy E becomes independent of the angular variables w' , β' , γ' if we disregard terms proportional to the square and higher powers of F and terms of the order of magnitude $F\frac{\sigma}{\omega}$ and $F\frac{\varrho}{\omega}$. With this approximation J' , P' and Q' will be constant and w' , β' and γ' increase uniformly with the time. The substitution of these variables in the expression for the displacement x gives

$$x = x_0 - Fe \left(\frac{\partial x}{\partial J} \frac{\partial S}{\partial w} + \frac{\partial x}{\partial P} \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial Q} \frac{\partial S}{\partial \gamma} - \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial S}{\partial J} - \frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\partial S}{\partial Q} \right)$$

where x_0 is the function x (2) in which the new variables have been substituted for the old. The displacement x of the electrical centre of the perturbed atom relative to the nucleus is given by the mean value of x . Since x_0 is zero, \bar{x} is seen to be proportional to F , and by means of EHRENFEST'S theorem on adiabatic invariance it is possible to calculate from this displacement the energy term proportional to F^2 in the expression for the energy in the stationary states of the perturbed atom (there occur no terms proportional to F). It is easily shown to be equal to the displacement \bar{x} of the electrical centre multiplied by $Fe/2$.¹

Since in this calculation we are interested only in the displacement of the electrical centre, we need only find those terms in the expression (3) for x , which do not involve β and γ . When the indicated calculations are performed using the relations

¹ See KRAMERS' Dissertation p. 78, loc. cit. See also SCHRÖDINGER, Zs. für Phys. **11**, 170, 1922; KRAMERS, Zs. für Phys. **13**, 312, 1923.

$$D'_0 = \frac{3}{4} z \frac{J}{P} (P+Q) \sqrt{J^2 - P^2}$$

$$D''_0 = \frac{3}{4} z \frac{J}{P} (P-Q) \sqrt{J^2 - P^2}$$

$$z = \frac{1}{4\pi^2 N e^2 m}$$

and substituting for J' , P' and Q' from the equations

$$J' = nh, \quad P' = kh, \quad Q' = jh,$$

where n , k and j are integral positive quantum numbers satisfying $n \geq k \geq j > 0$, the energy expression is found to be

$$E = E_0 - \frac{9}{512} \frac{F^2 h^3}{\pi^4 N^2 e^2 m^2} \frac{n^2}{k^3} \left\{ \frac{k+j}{(\sigma+\varrho)^2} [(2n^2k - 3k^3 - k^2j)\sigma + (n^2k - n^2j - 2k^3)\varrho] + \frac{k-j}{(\sigma-\varrho)^2} [(2n^2k - 3k^3 + k^2j)\sigma - (n^2k + n^2j - 2k^3)\varrho] \right\}, \quad (4)$$

where

$$E_0 = -\frac{2\pi^2 N^2 e^4 m}{n^2 h^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi N e^2}{hc} \right)^2 \left(-\frac{3}{n^2} + \frac{4}{nk} \right) \right\} + jh\varrho,$$

and ϱ has a positive or negative value depending on whether the vector of the electronic angular momentum about the nucleus makes an angle less or greater respectively than a right angle with the direction of the magnetic field.

Before concluding this paragraph we shall investigate a little more closely the special cases where the magnetic field is of such an intensity that in a certain stationary state $|\sigma|$ and $|\varrho|$ are exactly equal. Here we have an example of accidental degeneration of the perturbed system. In such a case the ordinary method cannot be used, since the expression (4) for the energy would be infinite, but the so-called BOHLIN'S¹ method is applicable. BORN and HEISEN-

¹ K. BOHLIN, Über eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie. Bihang till K. Svenska Vet. Akad. Handlingar **14**, Afd. I, No. 5. Stockholm 1888. Compare POINCARÉ, Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Paris 1893), Vol. 2, Chap. 9.

BERG¹ have shown how the quantum theory should be applied to such a case. The method can be briefly summarized. It is always possible in such cases to effect a canonical transformation of variables such that with the new uniformizing variables $J_1, J_2, \dots, J_f, w_1, w_2, \dots, w_f$ the frequency corresponding to one of the angle variables, say the w_f is zero, i. e. in the stationary state under consideration $\frac{dw_f}{dt} = 0$ in the unperturbed system. If the Hamiltonian function is given in the form

$$H = H_0 + \lambda H_1 + \dots,$$

where H_0 is a function of the J 's and $\lambda H_1 + \dots$, which is a function of the J 's and w 's, represents the perturbing potential, the energy in the corresponding stationary state of the perturbed system will be of the form

$$E = E_0 + \lambda E_1 + \dots,$$

where the additionally energy term λE_1 is secured by taking the mean value of λH_1 over all the w 's except w_f . In the corresponding stationary state of the perturbed system w_f will have a stationary value w_f^0 which must be determined from the relation

$$\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial w_f} = 0$$

and those roots of this equation give mechanically stable motions for which $\bar{H}_1 \Big| \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_f^2}$ is a minimum.

For our problem we may use the Hamiltonian function (1) given above after making the canonical transformation defined by the equation

$$J = J, \quad \frac{P+Q}{2} = J_1, \quad \frac{-P+Q}{2} = J_2,$$

$$w = w, \quad \beta + \gamma = w_1, \quad -\beta + \gamma = w_2.$$

¹ M. BORN and W. HEISENBERG, Zs. für Phys. **14**, 44, 1923.

Then using the method outlined above we obtain for the case that $\sigma + \varrho = 0$

$$\lambda E_1 = \frac{3Fh^2}{16\pi^2 N e m} \frac{n}{k} \sqrt{n^2 - k^2} (k + j) \quad (4a)$$

and for $-\sigma + \varrho = 0$

$$\lambda E_1 = \frac{3Fh^2}{16\pi^2 N e m} \frac{n}{k} \sqrt{n^2 - k^2} (k - j) \quad (4b)$$

Thus for conditions such that accidental degeneration occurs in one of the stationary states of the unperturbed system consisting of the atom in the presence of the magnetic field alone, the energy of the stationary states of the perturbed atom contains a term proportional to the first power of F in contrast to the case when $|\sigma|$ and $|\varrho|$ are not equal. This is due to the circumstance that the atom remains so to speak in oriented positions in the electric field and thus permits the effects of the field to accumulate from one revolution to the next and thus to cause a change in the motion of another order of magnitude. However, the effect can occur for only a few values of the magnetic field and has no general interest for the discussion of the observations of H. M. HANSEN and JACOBSEN and of FÖRSTERLING and G. HANSEN.

§ 3. Influence of the perturbing electric fields on the Zeeman effect of the hydrogen lines.

We shall now proceed to discuss the theoretical effect of the electric field on the spectrum. The frequency of the emitted light will be given by the Bohr frequency condition

$$\nu = \frac{E' - E''}{h}$$

where E' and E'' represent the energies of the system in the initial and final state respectively. In the presence of

a homogeneous magnetic field alone, there will appear in the motion of the atom harmonic components of two types, linear components parallel to the field of frequencies $\tau\omega \pm \sigma$ and circular components perpendicular to the field of frequencies $\tau\omega \pm \sigma \pm \varrho$. From the correspondence principle it follows therefore that, while transitions are possible for which n changes by any number of units, the quantum number k can only increase or decrease by one unit, further that any component of the spectral lines which would appear in the absence of the magnetic field will be split up in three components, one for which j remains unaltered, and two for which j changes by ± 1 unit. The first is polarized parallel to the magnetic field, while the two latter are polarized perpendicular to this field. It has been shown in a general way by BOHR¹ that in the presence of an external electric field new vibrations occur in the motion of the electron whose frequencies are the sums and differences of the frequencies in the undisturbed motion and whose amplitudes are proportional to F and that therefore in accordance with the correspondence principle new transitions would occur giving lines with intensities proportional to F^2 . A simple calculation shows that in the case of superimposed parallel electrical and magnetic fields the new frequencies $|\tau\omega|$ and $|\tau\omega \pm 2\sigma|$ occur in the motion parallel to the fields and $|\tau\omega \pm \varrho|$ and $|\tau\omega \pm 2\sigma \pm \varrho|$ in the motion perpendicular to the fields. We must expect therefore in accordance with the correspondence principle new p -components in which k remains unchanged or changes by 2 units and also new s -components in which k changes by 0 or ± 2 . These calculations have been made

¹ BOHR, Quantum theory of line spectra, loc. cit. pp. 96—98.

by KRAMERS¹. In the case of crossed electric and magnetic fields the new frequencies in the motions parallel to the magnetic field are $|\tau\omega \pm \varrho|$ and $|\tau\omega \pm 2\sigma \pm \varrho|$ and those perpendicular to the field $|\tau\omega \pm 2\varrho|$, $|\tau\omega \pm 2\sigma|$, $|\tau\omega \pm 2\sigma \pm 2\varrho|$ and $|\tau\omega|$. We therefore expect new p -components corresponding to changes of k by 0 or ± 2 and of j by ± 1 and new s -components corresponding to a change of k by 0 or ± 2 and of j by 0 or ± 2 .

Fig. 1 illustrates these effects diagrammatically. The first plot shows the components into which a hydrogen "line" is broken up by the presence of a pure magnetic field. In this we have represented the whole group of possible fine structure components by a single line. The s -components are displaced from the position of the line in the absence of the field by $\pm \varrho$ and the p -component has the position of the original line. The second plot shows the components produced by a strong magnetic field and a weak electric field parallel to it. The solid lines indicate the presence of the components present in the absence of the electric field and the dotted lines superimposed on these indicate the presence of new components corresponding to $k' - k''$ equal to 0 or ± 2 with intensities proportional to F^2 . The general appearance of the LORENTZ triplet would be the same as in the absence of the electric field. The third plot shows the components in the presence of a strong magnetic field with a weak electric field perpendicular to it. The solid and dotted lines have the same meaning as in the second plot. The p -components in this case consist of a triplet, one member having the position of the original line and the other displaced from this position by $\pm \varrho$. The s -components consist of five

¹ KRAMERS' Dissertation, Ch. IV and VI.

lines one having the position of the original line and the others displaced from this position by $\pm \varrho$ and $\pm 2\varrho$.

In figure 2 are shown three theoretical plots of the fine structure of the s -components of H_α (displaced by the amount ϱ from the original line) in a magnetic field first without a superimposed electric field, second with a superimposed electric field of 200 Volt/cm parallel to the magnetic field and finally with an electric field of 600 Volts/cm perpendicular to a magnetic field of 10,000 Gauss. These plots are labelled unperturbed, parallel and transverse respectively. For H_α we have $n' = 3$ and $n'' = 2$. The values of the k 's for the initial and final states are written above the unperturbed components and these are indicated below by $k' - k''$. The values of the j 's for the initial and final states are written at the ends of the components appearing in the presence of the parallel fields and

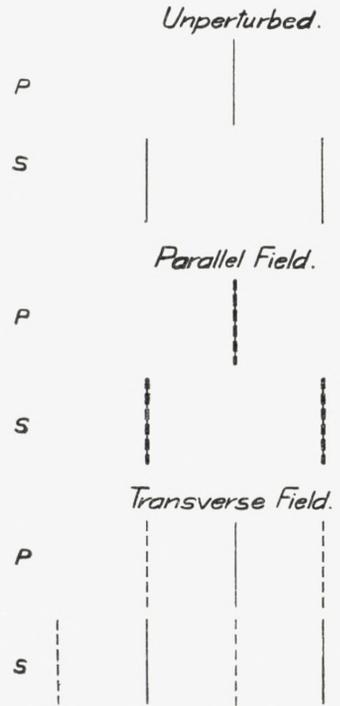


Fig. 1.

transverse fields. These are indicated below by $j' - j''$ and $(\pm)j' - j''$ respectively. In the parenthesis beside these numbers in the latter case is placed a plus or a minus sign to indicate whether ϱ has a positive or negative sign in equation (4) for the calculation of the component. The components of the fine structure which do not appear in the presence of a pure magnetic field are represented by dotted lines and all »new« components originating from these so-called »forbidden« components are also represented by dotted lines to indi-

cate that their intensities are proportional to the square of the electric force while the intensities of the original components to a first approximation are independent of the field strength. The relative intensities of the components are roughly shown by the widths of the lines and are taken from KRAMERS' dissertation. In Fig. 3 are shown similarly the undisplaced p -components. The methods of representation is the same as for Fig. 2. For the calculations the formula¹

$$E = E_0 - \frac{9}{4} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^8 \frac{F^2 c^2}{N^6 e^{10} m^3} n^5 k (n^2 - 2k^2 + j^2)$$

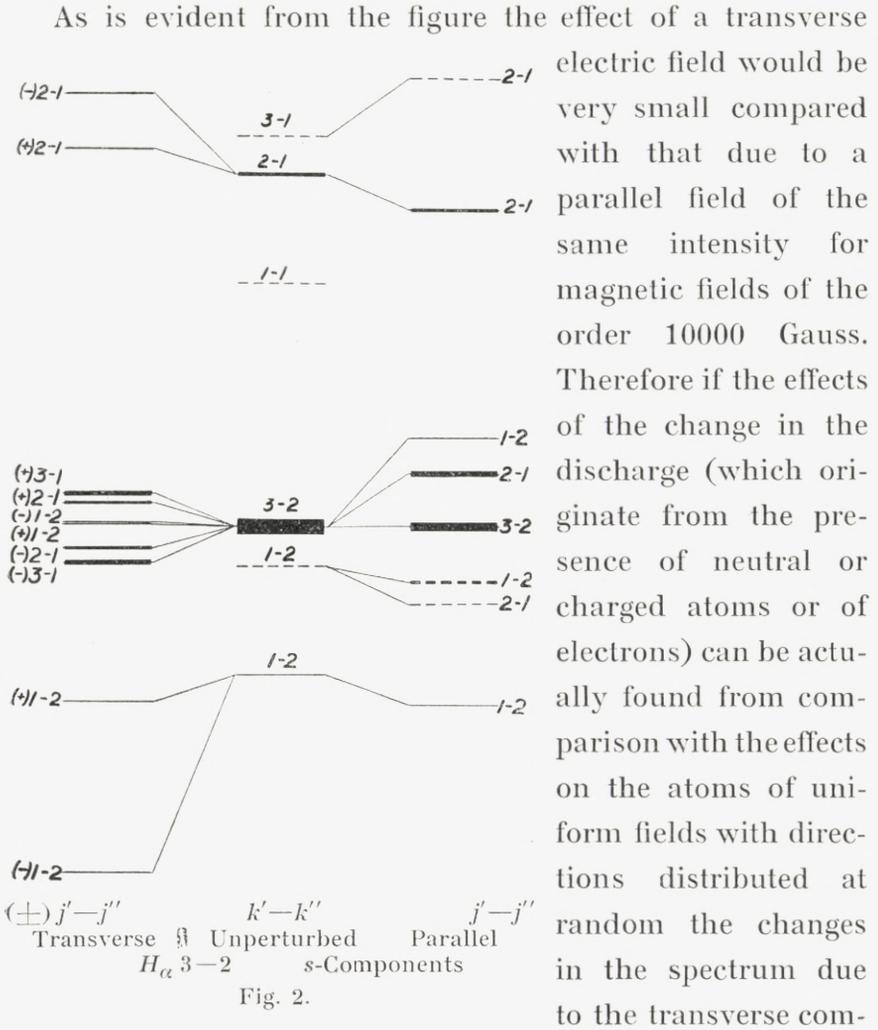
has been used for the case of the parallel fields and formula (4) for the case of the transverse fields. For an electric field which makes an angle other than 0° or 90° with the magnetic field, the effects of its parallel and perpendicular components will be simply superimposed as mentioned above.

§ 4. Discussion of Experiments.

The experiments in the case of H_α are clearer than for any other line investigated. FÖRSTERLING and G. HANSEN state that the two components move together as the field is increased in a way that is approximately but not exactly symmetrical. The photograph which they reproduce, showing the effects of fields of 4000 and 10000 Gauss respectively on the p -component of H_α , indicates that the stronger component under a field of 4000 Gauss has very nearly the same position as without the field and that the weaker component has shifted toward the stronger component under the influence of the field. The components have quite merged, however, under 10000 Gauss and both components have moved from their original position. Moreover the intensity has become very much less indicating that some change

¹ KRAMERS, Zs. für Phys. **3**, 214, 1920.

has taken place in the character of the excitation. These authors state that the effect on the *s*-component is quite similar to the effect on the *p*-component.



the current. With the experimental arrangement used this means a perturbing electric force parallel to the magnetic force. On the other hand a transverse electric force may arise from the motion of the radiating atoms in the magnetic field. In fact, if these do not move strictly parallel to the magnetic force, the motion of the charged particles in the atom will on account of the LORENTZ force be affected in a similar way as if the atom was placed in a uniform electric field¹. A simple calculation shows, however, that it would be necessary for the atoms to be moving with a velocity component perpendicular to the magnetic field corresponding to the

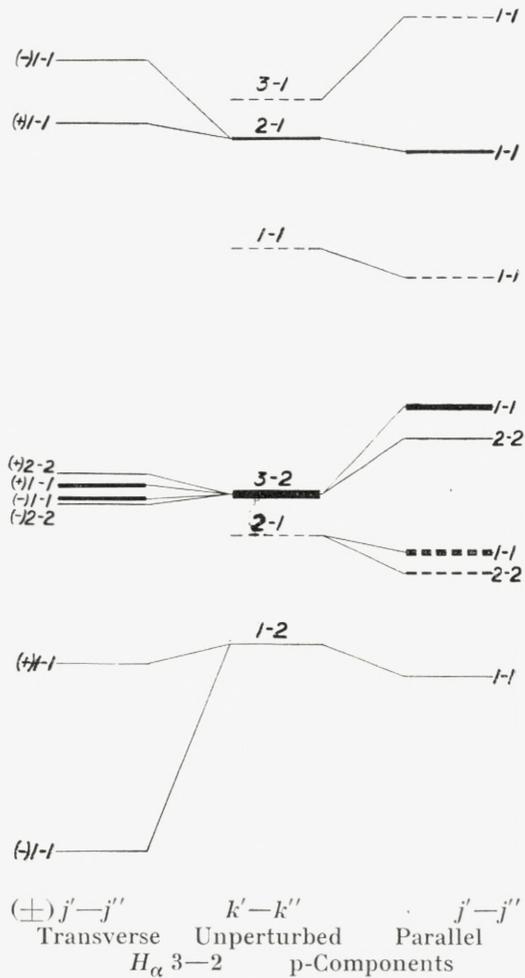


Fig. 3.

fall of a hydrogen ion through ten volts in order to be acted on by LORENTZ force of two electrostatic units and thus to produce the effect shown in the figures. It seems quite improbable that many atoms could be moving with transverse velocities this large. Moreover no p -components

¹ Comp. W. Wien, Ber. d. Berlin. Akad. d. Wiss. 48, 70, 1914.

are observed in which j changes by ± 1 and no s -components in which j changes by 0 or ± 2 , as would be expected in the presence of a relatively strong transverse field (comp. Fig. 1). Therefore we can definitely conclude that the observed effects are not due to transverse fields. The observed effect on the p -component at 4000 Gauss on the other hand might be ascribed to the effect of the components of the perturbing electric field parallel to the magnetic field and this same assumption might explain the effect on the s -components as well. But it seems impossible to explain the observed anomalous effect of larger magnetic fields satisfactorily in this way. If the observations are not essentially influenced by experimental errors due to the difficulties of separating lines which are so near each other, it appears then that the cause for the anomalies observed must be the irregular and varying fields present at encounters and that their effects are not similar to those of homogeneous fields. It may be noted that in the well known broadening of spectral lines due to pressure we meet with a similar problem. As pointed out by STARK¹ this broadening shows a general resemblance with the effect of homogeneous electric fields on these spectra. The attempts to account for the effect quantitatively² have proved, however, that in many cases the observations can be explained only by assuming a particular effect of encounters essentially different from that of homogeneous fields³.

Another effect which perhaps shows still greater similarity to our case has been observed by H. M. HANSEN, T. TAKAMINE and S. WERNER in their work on the effect of

¹ Compare J. STARK and H. KIRSCHBAUM, *Ann. d. Phys.* **43**, 1040, 1914.

² J. HOLTSMARK, *Ann. d. Phys.* **58**, 577, 1919.

³ J. FRANCK, *Festschrift der Kaiser Wilhelm Gesellschaft zu ihrem zehnjährigen Jubiläum*, pp. 77—81, 1921.

magnetic and electric fields on the mercury spectrum¹. Thus the line $1S - 2p_1$ (2270 Å) which does not appear in the spectrum of the undisturbed atom, could not be excited in a homogeneous electric field and appeared only as a weak line in the presence of a magnetic field parallel to the direction of the discharge. It was excited quite strongly, however, in a condensed discharge or in a transverse magnetic field. These authors conclude that the line would not be produced in appreciable intensities in homogeneous electric or magnetic fields as is also to be expected from the theory but that the magnetic field modified the discharge in such a way that the conditions were similar to those found in the condensed discharge where the effect of these varying and irregular fields at encounters is greatest. Although unfortunately the present state of the spectral theory does not permit us to describe in detail the effect of these varying fields, it seems quite probable that the observed effect of large magnetic fields on the fine structure of the hydrogen and helium lines is due to the modifying influence of the magnetic field on the discharge rather than to a direct effect of the magnetic field itself.

In conclusion the author wishes to express his best thanks and indebtedness to Dr. H. A. KRAMERS for his interest and advice during this work.

¹ D. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fysiske Meddelelser V, 3, 1923.

